

# 4

## MESURES DE DISTANCE

### 1 HISTORIQUE

Alors que de tout temps on a su facilement mesurer des angles avec précision, la mesure de distances a toujours été un problème pour le topomètre. La précision des méthodes classiques de mesure n'était **pas homogène** avec la précision des mesures angulaires : on savait dès le début du siècle lire des angles à 2,5 dmgon près (ce qui donne un écart de **0,4 mm à 100 m**) mais il était très difficile d'obtenir une précision au centimètre sur des bases courtes de 100 m de long... Les mesures très précises au fil Invar<sup>1</sup> (voir § 2.3.1) demandaient beaucoup de temps et de moyens.

Un premier progrès a été l'apparition des distancemètres (les premières mesures datent de 1948 à la suite de travaux du physicien Suédois Erik Bergstrand sur la connaissance de la vitesse de la lumière) : la mesure de distance est basée sur la mesure du déphasage d'une onde lumineuse ayant parcouru l'aller-retour sur la distance à mesurer. Ce procédé permet de s'affranchir des irrégularités du terrain et de la longueur limitée de la chaîne. Les premiers distancemètres étaient toutefois très encombrants, peu précis, de faible autonomie et très coûteux.

Le progrès décisif a été le **perfectionnement** et la **miniaturisation** de ces appareils qui sont aujourd'hui intégrés à l'optique même des théodolites modernes (stations totales). Les distancemètres actuels sont d'un encombrement négligeable, d'une autonomie suffisante pour une journée de travail au minimum et leur précision varie de  $\pm(5 \text{ mm} + 5 \text{ mm/km})$  pour le DI 1001 à  $\pm(1 \text{ mm} + 1 \text{ mm/km})$  pour le DI 2002 (Wild),

---

<sup>1</sup> L'Invar est un alliage d'acier à forte teneur en nickel et possédant un très faible coefficient de dilatation, inférieur à 1 mm/ km/°C, soit 10 fois moins que l'acier dans le domaine des températures courantes.

soit environ  $\pm 2$  mm pour 1 km. (cf. § 6 pour le détail de ces caractéristiques de précision en mm et mm/km).

La dernière étape est la démocratisation, depuis 1990, du système de **positionnement par satellite** (système **GPS**, chap. 7) qui permet, grâce à l'emploi de deux récepteurs, de mesurer la longueur d'une base avec une précision de l'ordre de  $\pm (5 \text{ mm} + 1 \text{ mm/km})$  sur des distances de 10 à 15 km, le temps de mesure variant de 10 à 30 minutes quels que soient les obstacles situés entre les points et quelles que soient les conditions météorologiques, éventuellement de jour ou de nuit...

Dans ce chapitre, nous étudierons les principales techniques de mesure de distance utilisables par le topomètre en comparant les précisions de chacune. Le but n'est pas de déterminer la meilleure, mais d'en choisir une en fonction du matériel disponible et de la précision demandée.

#### Remarque

Certaines méthodes décrites dans les paragraphes suivants paraîtront bien poussiéreuses au topographe moderne, y compris la mesure au ruban, car avec les « stations totales » actuelles, l'opérateur réfléchit de moins en moins. Afin de faire réfléchir les futurs opérateurs, nous avons tout de même détaillé ces méthodes, sans toutefois revenir au schéma du tachéomètre Sanguet. Leur aspect formateur n'est pas négligeable, ne serait-ce que pour la réflexion personnelle et l'application du calcul trigonométrique.

## 2 MESURES DE DISTANCES À L'AIDE D'UNE CHÂÎNE

La mesure à la chaîne est le moyen le plus classique et utilisé pour déterminer les distances. Ses inconvénients principaux sont d'être tributaire du terrain (accidenté ou non, en forte pente ou non, etc.) et d'être limité en portée (les rubans utilisés couramment sont limités à 100 m). La précision de la mesure est également limitée et dépend fortement des opérateurs.

Autrefois, la **chaîne** était une véritable chaîne à maillons étalonnée servant à mesurer les longueurs, appelée également **chaîne d'arpenteur**.

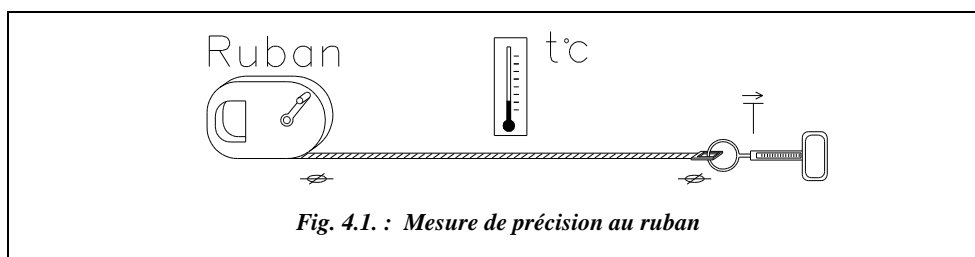
Aujourd'hui, on utilise le **décamètre**, simple, double, triple ou quintuple, bien plus facile à manipuler. On a gardé le nom de **chaîne** qui devient le terme général englobant le décamètre, le double-décamètre, etc. On utilise aussi le terme de **ruban**.

	10 m	20 m	30 m	50 m	100 m
CLASSE I	$\pm 1,1$ mm	$\pm 2,1$ mm	$\pm 3,1$ mm	$\pm 5,1$ mm	
CLASSE II	$\pm 2,3$ mm	$\pm 4,3$ mm	$\pm 6,3$ mm	$\pm 10,3$ mm	$\pm 20,3$ mm
CLASSE III	$\pm 4,6$ mm	$\pm 8,6$ mm	$\pm 12,6$ mm	$\pm 20,6$ mm	

Les rubans sont répartis en **trois classes de précision** : le tableau précédent en donne les **tolérances de précision** fixées par une norme européenne CEE (Communauté Économique Européenne).

Les valeurs du tableau étant des tolérances, si l'on veut obtenir l'écart type il suffit de les diviser par 2,7 (tome 2 chap. 5 § 12.3.2). Par exemple pour un ruban de 50 m de classe II, l'écart type sur une mesure est de  $\pm 10,3 / 2,7 = \pm 3,8$  mm.

La longueur d'un ruban est donnée à une température ambiante donnée (20 °C en général) et pour une tension donnée. Par exemple, le ruban Métralon en acier est étalonné avec une tension de 4,9 daN pour un ruban de 50 m de classe I. La force de tension à respecter est généralement indiquée sur le ruban. Les rubans en matériaux souples sont très sensibles à cette tension (voir l'étude des corrections dans les paragraphes suivants).



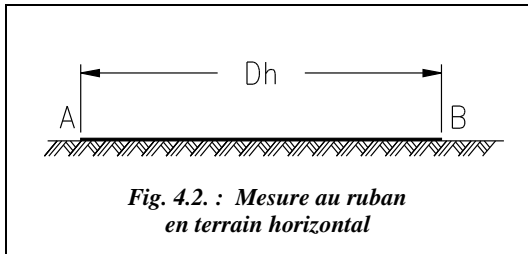
Lors de **mesures fines**, dont la précision doit avoisiner la tolérance du ruban, il faut :

- tenir le ruban par l'intermédiaire d'un **dynamomètre** pour assurer une tension optimale et éviter de l'allonger par traction lors de la mesure : un effort de **5 daN** sur un ruban en acier de section  $0,2 \times 13$  mm<sup>2</sup> équivaut à un allongement de **5 mm** sur un ruban de 50 m, ordre de grandeur de la tolérance de précision de la classe I. Si la chaîne est suspendue au-dessus du sol, l'opérateur doit régler la tension du dynamomètre de façon que **l'erreur de chaînette**, c'est-à-dire la forme incurvée prise par le ruban, s'annule avec l'allongement dû à la tension du ruban (§ 2.3.6) ;
- corriger la valeur lue du coefficient de **dilatation** linéaire du matériau du ruban (généralement de l'acier dont le coefficient vaut  $11.10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>, soit un allongement de **5,5 mm** sur un ruban de **50 m** pour une augmentation de **10 °C** ;
- si le chaînage demande plusieurs portées de chaîne, **aligner les différentes portées** soit à vue, soit avec des fiches d'arpentage ou des jalons. Une erreur d'alignement de **30 cm** sur un ruban de **50 m** donne une erreur sur la distance mesurée de **1 mm**. Dans ce cas, la mesure lue est plus grande que la valeur réelle.

## 2.1 Mesures en terrain régulier

En topographie, la donnée essentielle est la **distance horizontale** entre deux points. Suivant la configuration du terrain, elle est plus ou moins difficile à obtenir précisément à la chaîne.

### 2.1.1 Terrain régulier et horizontal



Si le terrain est régulier et en pente faible (moins de 2 %), il est possible de se contenter de poser le ruban sur le sol et de considérer que la distance horizontale est lue directement (fig. 4.2.). La précision qu'il est possible d'obtenir sur une mesure est au mieux de l'ordre de  $\pm 5$  mm à 50 m pour un ruban de classe I.

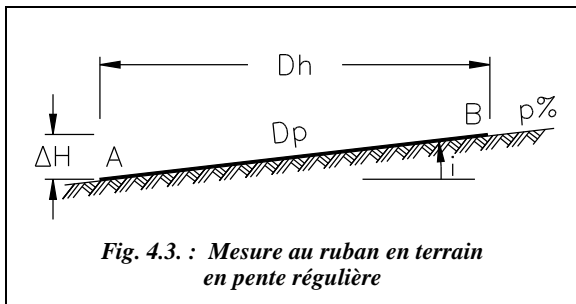
#### Application

Montrez qu'à partir de 2 % de pente, une erreur de 1 cm apparaît sur une mesure de 50 m.

#### Réponse

$Dp = 50$  m,  $\Delta H = 0,02 \cdot 50 = 1$  m donc  $Dh = 49,99$  m.

### 2.1.2 Terrain en pente régulière



Si le terrain n'est pas parfaitement horizontal, il faut considérer que l'on mesure la distance suivant la pente. Pour connaître la distance horizontale avec précision, il faut donc mesurer la dénivellée  $\Delta H$  entre A et B ou bien la pente  $p$  de AB (fig. 4.3.).

Soit : 
$$Dh = \sqrt{Dp^2 - \Delta H^2}$$

ou bien : 
$$Dh = Dp \cdot \cos i = Dp \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 i}} = \frac{Dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$
 puisque  $p = \tan i$ .

La précision est du même ordre que précédemment, c'est-à-dire 10 mm à 50 m.

#### Application

Vous mesurez une distance suivant la pente de 37,25 m et vous mesurez, au clisimètre, une pente de 2,3 %. Quelles sont les valeurs de  $Dh$  et de  $\Delta H$  ?

#### Réponse

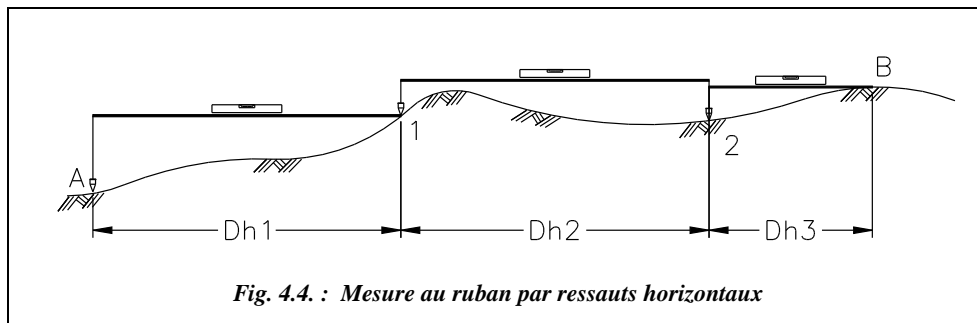
$$Dh = 37,25 / \sqrt{1 + 0,023^2} = 37,24$$
 m et 
$$\Delta H = \sqrt{37,25^2 - 37,24^2} = 0,86$$
 m.

## 2.2 Mesures en terrain irrégulier ou en forte pente

On ne peut pas tendre le ruban sur le sol à cause de ses ondulations. De plus, la pente (ou la distance à chaîner) est telle qu'on ne peut pas directement mesurer la distance  $Dh$ .

### 2.2.1 Mesure par ressauts horizontaux

Citons pour mémoire la méthode appelée mesure par **ressauts horizontaux** ou **cultellation**. Illustrée par la figure 4.4., elle nécessite l'emploi d'un niveau à bulle et de deux fils à plomb en plus de la chaîne et des fiches d'arpentage (ou jalons). Sa mise en œuvre est longue et le procédé peu précis.



On peut remarquer que :  $Dh = Dh_1 + Dh_2 + Dh_3$

#### Remarque

Lorsque l'opérateur doit reporter plusieurs fois le ruban pour mesurer une longueur, il faut **aligner les portées**. Cet alignement s'effectue généralement à vue en utilisant des fiches d'arpentage ou des jalons. Le défaut d'alignement doit être inférieur à 20 cm sur 30 m (ce qui est relativement facile à respecter) pour obtenir une précision au millimètre.

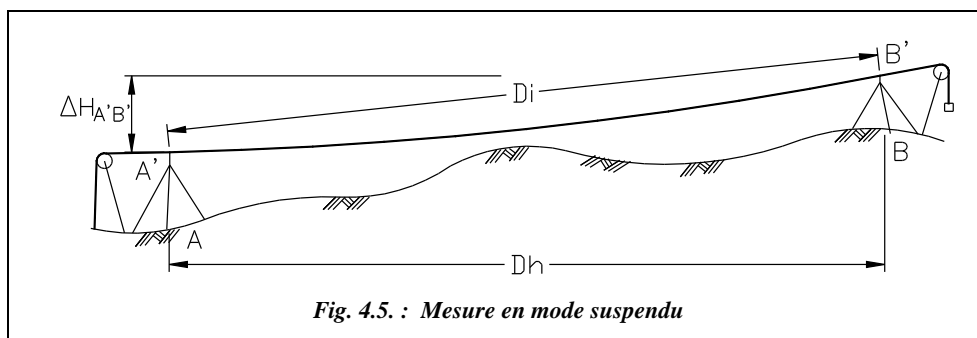
Si l'opérateur mesure une longueur de 50 m avec un écart type valant par exemple  $\sigma_L = \pm 10$  mm, la précision obtenue sur une longueur mesurée avec  $n$  reports du ruban de 50 m vaut  $\sigma_L \cdot \sqrt{n}$  (tome 2 chap. 5 § 12.3.6.4). Par exemple, une longueur de 125 m exige trois reports de ruban, donc une incertitude minimale de  $\pm 10 \cdot \sqrt{3} \approx \pm 17$  mm.

### 2.2.2 Mesure en mode suspendu

Un fil en matériau stable (Invar) est **tendu au-dessus du sol**. La tension est maintenue **constante** par des poids (fig. 4.5.). L'opérateur doit mesurer la dénivelée  $\Delta H$  entre les sommets A' et B' des tripodes de suspension du fil pour pouvoir calculer la longueur  $Dh$

en fonction de la distance inclinée  $Di$  mesurée :  $Dh = \sqrt{Di^2 - \Delta H^2}$ .

On sait calculer l'erreur sur la distance due à la forme de **chaînette** prise par le fil (§ 2.3.5). Il est même possible d'annuler l'erreur de chaînette par un choix judicieux de la tension à appliquer au fil (§ 2.3.6).



Cette méthode donne des résultats satisfaisants en mesurage de précision mais elle est longue à mettre en œuvre. On obtient une précision millimétrique pour des portées d'une centaine de mètres. Elle est applicable à un ruban.

#### Remarque

La différence entre la longueur de la corde  $A'B'$  et celle de la chaînette peut être considérée comme constante **pour une tension donnée et pour un fil donné** (elle est fonction de son poids par unité de longueur) si la dénivelée entre  $A'$  et  $B'$  reste faible. C'est pourquoi certains constructeurs donnent la correction de chaînette à appliquer pour une tension donnée sous forme d'une correction d'étalonnage spécifique à la mesure en mode suspendu.

## 2.3 Mesurage de précision : étalonnage d'un ruban

Pour effectuer des mesures de haute précision avec un ruban, il faut l'étalonner. Ceci se fait en mesurant la longueur d'une base connue très précisément.

### 2.3.1 Construction d'une base d'étalonnage précise

Une méthode consiste à utiliser le mesurage au **fil Invar**. Ce procédé sert aussi à l'étalonnage des distancemètres : actuellement, cet étalonnage se fait plutôt par interférométrie, ce qui assure des précisions de l'ordre de 0,01 mm sur 100 m.

Le fil Invar permet la création de bases connues avec une précision inférieure au millimètre sur des portées allant jusqu'au kilomètre (mesure en mode suspendu, § 2.2.2).

Des bases d'étalonnage d'une longueur de 120 m connues au millimètre, sont mises à disposition des topomètres par le service du cadastre des grandes villes. La DRIR (Direc-

tion Régionale de l'Industrie et de la Recherche) délivre les certificats d'étalonnage des rubans de précision (classe I).

### 2.3.2 Correction d'étalonnage

La valeur réelle d'une mesure s'exprime par  $L_{\text{exacte}} = L_{\text{mesurée}} \cdot (1 + k_E)$

$k_E$  est le **coefficient d'étalonnage** déterminé en mesurant la longueur d'une base d'étalonnage connue.

On appelle **correction d'étalonnage** le terme

$$C_E = k_E \cdot L_{\text{mesurée}}$$

**L'opérateur lit la valeur indiquée par le ruban sur la base connue** : si le ruban est trop long, il lit une valeur trop petite et inversement, s'il est trop court, une valeur trop grande.

Par exemple, un double décimètre indique 19,987 m en mesurant une base de 20,000 m (fig. 4.7.). Il est donc trop long de 0,013 m et donne des valeurs trop petites. Il faut le corriger de 0,013 m tous les 20 m.

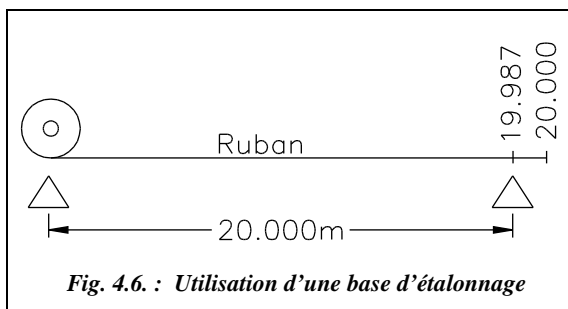


Fig. 4.6. : Utilisation d'une base d'étalonnage

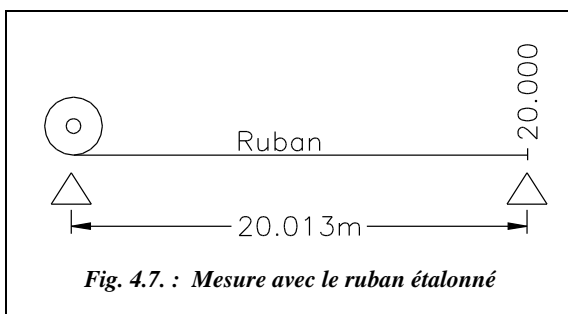


Fig. 4.7. : Mesure avec le ruban étalonné

L'expression du coefficient d'étalonnage est :

$$k_E = \frac{L_{\text{base}} - L_{\text{indiquée par le ruban}}}{L_{\text{indiquée par le ruban}}}$$

Dans le cas de la figure 4.7., on obtient :  $k_E = 6,5 \cdot 10^{-4}$ .

Si l'opérateur mesure avec le même ruban une longueur de 20,000 m (fig. 4.6.), elle vaut en réalité  $20 \cdot (1 + 6,5 \cdot 10^{-4}) = 20,013$  m.

S'il mesure sur le terrain une longueur de 18,655 m, sa valeur « réelle » est :

$$L_{\text{exacte}} = 18,655 \cdot (1 + 6,5 \cdot 10^{-4}) = 18,667 \text{ m.}$$

#### Remarque

Le terme  $m_E = \frac{L_{\text{base}}}{L_{\text{indiquée par le ruban}}}$  est appelé **module d'étalonnage**. On a donc  $k_E = m_E - 1$ , ici  $m_E = 1,00065$ .

### 2.3.3 Correction due à la température

Un ruban est généralement étalonné à la température  $t_e = 20\text{ °C}$ . La correction de dilatation est positive si la température est supérieure à la température d'étalonnage ; dans ce cas, un ruban trop long donne des résultats trop petits ; fig. 4.5. et 4.6. Cette correction est négative si la température est inférieure à la température d'étalonnage ; dans ce cas, un ruban trop court donne des résultats trop grands. Si vous mesurez en été, au soleil, la température du ruban en acier peut atteindre  $50\text{ °C}$  ; elle peut être mesurée sur le terrain par des thermomètres d'ambiance ou par des thermomètres de contact.

Le coefficient de dilatation de l'acier est  $k = 1,08 \cdot 10^{-5}\text{ °C}^{-1}$ . On obtient donc :

$$L_{\text{exacte}} = L_{\text{mesurée}} \cdot [1 + 1,08 \cdot 10^{-5} \cdot (t - t_e)]$$

$t_e$  est la température d'étalonnage ( $20\text{ °C}$  en général).

#### Exemple

Si vous mesurez une longueur de  $35,035\text{ m}$  avec un ruban en acier à  $t = 40\text{ °C}$ , il faut corriger la valeur lue d'une valeur positive  $(40 - 20) \cdot 1,08 \cdot 10^{-5}$  soit  $+0,22\text{ mm/m}$ . Donc la longueur « exacte » est :  $35,035 \cdot (1 + 0,22 \cdot 10^{-3}) = 35,043\text{ m}$ .

### 2.3.4 Correction de tension (ou d'élasticité du ruban)

Comme toute mesure, l'étalonnage doit être fait à **tension constante** connue du ruban : pour cela, on utilise un dynamomètre ou bien un poids accroché au ruban suspendu au dessus du sol. L'allongement  $\Delta L$  en mètre d'un ruban d'acier soumis à une tension  $T$  s'exprime comme suit :

$L$  : longueur du ruban exprimée en m.

$S$  : section constante du ruban en  $\text{mm}^2$ .

$E$  : module d'élasticité de l'acier  $E = 21\,000\text{ daN/mm}^2$ .

$T$  : effort de tension exprimée en daN ( $1\text{ kgf} = 9,81\text{ N}$ ).

$$\Delta L = \frac{LT}{ES}$$

La longueur « exacte » est alors :  $L_{\text{exacte}} = L_{\text{mesurée}} \cdot (1 + k_T)$

avec :

$$k_T = \frac{(T - T_0)}{ES}$$

$k_T$  est appelé le **coefficient de tension**.

Dans l'expression précédente,  $T_0$  est la tension d'étalonnage ( $\approx 5\text{ daN}$ ).

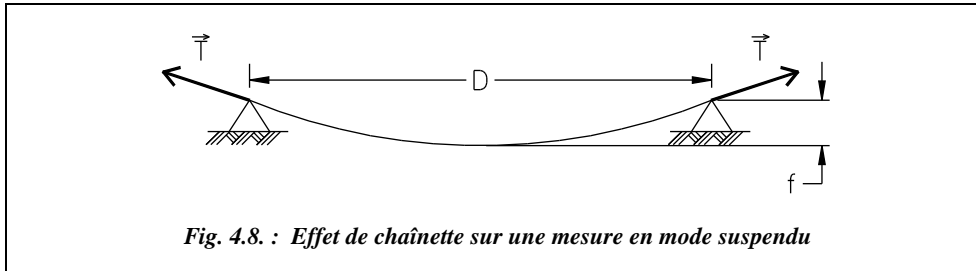
#### Exemple

Un ruban de  $50\text{ m}$ , de section  $(0,2 \times 13)\text{ mm}^2$  étalonné sous une tension de  $5\text{ daN}$  s'allonge de  $10\text{ mm}$  sous une tension de  $16\text{ daN}$ .



### 2.3.5 Correction de chaînette

Lors d'une mesure en mode suspendu, le ruban prend une forme dite de chaînette (déformation libre d'une chaîne tendue entre deux points A et B ; fig. 4.8.).



La flèche  $f$  de cette chaînette peut être réduite par augmentation de la tension mais ne peut pas être annulée. La correction est toujours négative car l'effet de chaînette est identique à un allongement de la chaîne.

Elle s'exprime par :  $L_{\text{exacte}} = D = L_{\text{mesurée}} \cdot (1 + k_C)$  avec  $k_C = -\frac{p^2 \cdot D^3}{24 \cdot L \cdot T^2}$

$T$  est la tension de la chaîne (daN).

$D$  est la distance rectiligne entre les supports du ruban (m).

$L$  est la longueur suivant le ruban c'est-à-dire  $L_{\text{mesurée}}$ .

$p$  est le poids du ruban par mètre de longueur (daN/m). Le poids volumique de l'acier étant de  $7,85 \cdot 10^3$  daN/m<sup>3</sup>, pour une section classique ( $0,2 \times 13$ ) mm<sup>2</sup>, le poids linéaire est  $p = 7,85 \cdot 10^3 \times 0,2 \cdot 10^{-3} \times 13 \cdot 10^{-3} \approx 20 \cdot 10^{-3}$  daN/m.

#### Application

- 1) Calculez la longueur réelle  $D$  mesurée par une chaîne en acier de longueur  $L = 50$  m et de ( $0,2 \times 13$ ) mm<sup>2</sup> de section, suspendue à ses extrémités et tendue à 5 daN.
- 2) Calculez l'erreur de chaînette induite par une variation de la tension de 2 daN sur la chaîne de l'exercice précédent lorsqu'elle est tendue à 10 daN.

#### Réponse

- 1) On cherche  $D = L(1 + k_C)$  donc il faut résoudre une équation du troisième degré. La résolution par approximations successives<sup>1</sup> permet de trouver dès la seconde itération que  $D = 49,914$  m. Le tableau ci-après indique les calculs successifs.

<sup>1</sup> L'équation du troisième degré est programmée sur certaines calculatrices, on peut aussi retrouver ses solutions exactes en utilisant par exemple la théorie des nombres complexes.

L'écart entre la longueur réelle et la longueur mesurée est 8,6 cm.

Si la tension est de 10 daN, on obtient  $D = 49,978$  m, soit un écart de 2,2 cm.

Pour obtenir un écart de l'ordre du millimètre, il faudrait tendre à 39 daN ; le ruban s'allongerait alors de 3,1 cm. Nous

verrons au paragraphe 2.3.6. qu'une tension de l'ordre de 15 daN permet d'équilibrer l'allongement dû à la tension et le « raccourcissement » dû à la chaînette.

ITÉRATIONS	D	$L - p^2 \cdot D^3 / 24 T^2$
	50,000	49,913
1	49,913	49,914
2	49,914	49,914

2) Pour  $T = 8$  daN,  $D = 49,966$  m ; l'écart est donc de 1,2 cm.

Pour  $T = 12$  daN,  $D = 49,985$  m ; l'écart est donc de 7 mm.

À partir de  $T = 16$  daN, une variation de tension de 1,5 daN entraîne une erreur inférieure à 1 mm sur 50 m.

**Remarque**

Les résultats des deux exercices précédents montrent qu'une tension de l'ordre de 15 à 16 daN permet une précision optimale avec ce ruban.

### 2.3.6 Notion de tension normale du ruban

Pour éliminer l'erreur de chaînette, il est possible d'appliquer au ruban une tension dite **normale**  $T_n$  telle que l'allongement dû à la tension compense l'erreur de chaînette. La valeur de  $T_n$  peut être calculée en égalisant les erreurs de chaînette et de tension, c'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{(T_n - T_0) \cdot L}{S \cdot E} &= \frac{p^2 \cdot D^3}{24 \cdot T_n^2} \\ \frac{p^2 \cdot D^3}{24 \cdot T_n^2} &= L - D \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_n = T_0 + \left(1 - \frac{D}{L}\right) \cdot S \cdot E \quad \text{Attention ! } D \text{ est fonction de } T_n.$$

**Application**

Calculez  $T_n$  pour une chaîne en acier de 50 m, de  $(0,2 \times 13)$  mm<sup>2</sup> de section étalonnée à 5 daN.

**Réponse**

Cette équation doit être résolue par approximations successives car la longueur exacte  $D$  est fonction de la tension normale  $T_n$  (voir ci-après). On trouve  $T_n = 15,221$  daN. L'erreur due à la chaînette est de + 9 mm. La longueur exacte est plus petite : c'est comme si on utilisait un ruban droit mais plus long de 9 mm. L'erreur due à l'augmentation de tension est de - 9 mm : le ruban est allongé de 9 mm, il indique donc une mesure trop petite. Les deux erreurs se compensent.

## Résolution de l'équation à l'aide d'un tableur



Excel 7

Pour trouver  $T_n$  il faut effectuer une résolution par approximation successives. Dans ce cas, elle ne peut être faite directement sur l'inconnue  $T_n$  car  $D$  est aussi inconnue et doit se calculer elle aussi par approximations. Une solution consiste à remplacer la valeur de  $T_n$  dans l'expression de  $D$  pour calculer  $D$  par approximations successives puis d'en déduire  $T_n$ .

La formule de calcul de  $D$  est : 
$$0 = \frac{p^2 \cdot D^3}{24 \cdot [T_0 + (1 - D/L) \cdot S \cdot E]^2} - L + D \quad (1)$$

Dans une nouvelle feuille de calcul d'Excel, disposez les calculs ainsi :

	A	B	C
1	$L =$	50	m
2	$S =$	2,6	mm <sup>2</sup>
3	$E =$	21 000	daN/mm <sup>2</sup>
4	$p =$	0,020 41	daN/m
5	$T_0 =$	5	daN
6	$D =$	49,990 6	m
7	Formule	0,000 000 0	
8	$T_n$	15,221	daN

- en case B1 la longueur de la chaîne : = 50.␣
- en case B2 la section : = 0,2\*13.␣
- en case B3 le module d'Young : 21 000.␣
- en case B4 on calcule  $p$  : =7,85\*B2/1 000.␣
- en case B5 la tension d'étalonnage : 5.␣
- en case B6, valeur quelconque de  $D$  : 50.␣
- en B7, équation (1) : = B4^2 \* B6^3 / 24 / (B5+(1-B6/B1)\*B2\*B3)^2 - B1 + B6.␣
- en B8, formule donnant  $T_n$  : = B5 + (1- B6/B1)\*B2\*B3.␣

La résolution utilisera la fonction « valeur cible » d'Excel (menu OUTILS) après avoir réglé la précision de ce calcul itératif à 0,000 001 ou moins dans la rubrique Calcul du menu OUTILS / OPTIONS. Dans la boîte de dialogue valeur cible, la cellule à définir est B7, la valeur à atteindre 0, la cellule à modifier B6. Excel trouve la valeur  $D = 49,9906$  m ce qui donne  $T_n = 15,221$  daN.

### 2.3.7 Applications

#### Application

Calculez la valeur exacte de la mesure suivante effectuée en mode suspendu en terrain horizontal, avec un ruban en acier de classe I, de  $2,6 \text{ mm}^2$  de section, de longueur  $50 \text{ m}$  :  $L_{\text{mesurée}} = 365,145 \text{ m}$ . La température du ruban est mesurée à  $28 \text{ }^\circ\text{C}$  et reste constante pendant toute la mesure ; la tension constante est de  $10 \text{ daN}$ . La mesure est faite en sept portées de  $50 \text{ m}$  et une portée d'appoint (toutes les portées sont considérées parfaitement alignées). Le ruban a été étalonné au préalable dans les conditions suivantes :  $T_0 = 4,5 \text{ daN}$ ,  $t_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . On a mesuré l'indication du ruban sur une base connue de  $50 \text{ m}$ , soit  $49,986 \text{ m}$ .

#### Réponse

Pour chaque portée de  $50 \text{ m}$ , on calcule la longueur exacte.

- Après correction d'étalonnage, la longueur réelle d'une portée de ruban à  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  est :  
 $50 \cdot [1 + (50 - 49,986)/49,986] = 50,0140 \text{ m}$ .
- Après correction de température, la longueur effective du ruban à  $28 \text{ }^\circ\text{C}$  est :  
 $50,0140 \cdot [1 + 1,08 \cdot 10^{-5} (28 - 20)] = 50,0183 \text{ m}$ .
- Après correction de tension, la longueur du ruban tendu à  $10 \text{ daN}$  est :  
 $50,0183 \cdot [1 + (10 - 4,5)/(21\,000 \times 2,6)] = 50,0234 \text{ m}$ .
- Après correction de chaînette, la longueur finale de  $D$  est :  
 $50,0234 \cdot [1 - (20,41 \cdot 10^{-3})^2 D^3 / 24 / 10^2 / 50,0234]$ .

On calcule  $D$  par approximations successives et on obtient  $D = 50,0017 \text{ m}$ . Ce qui est proche de la valeur étalon. La longueur exacte des sept premières portées est donc de  $350,012 \text{ m}$ .

Le calcul de la mesure d'appoint de  $15,145 \text{ m}$  est faite à l'aide du même principe ; comme précédemment, on reprend chaque correction :

- correction d'étalonnage :  $15,145 \cdot (1 + 2,8 \cdot 10^{-4}) = 15,1492 \text{ m}$
- correction de température :  $15,1492 \cdot (1 + 8,64 \cdot 10^{-5}) = 15,1505 \text{ m}$
- correction de tension :  $15,1505 \cdot (1 + 1 \cdot 10^{-4}) = 15,1521 \text{ m}$
- correction de chaînette : longueur finale  $D = 15,1515 \text{ m}$ .

L'écart type sur une mesure étant de  $\pm 1,9 \text{ mm}$  ( $= \pm 5,1/2,7$  en classe I), sur huit portées il sera de  $\pm 5,3 \text{ mm}$  ( $\pm 1,9 \cdot \sqrt{8}$ ). La longueur exacte finale est de  **$365,163 \text{ m} \pm 5 \text{ mm}$** , soit un écart d'environ  $2 \text{ cm}$  par rapport à la valeur brute.

#### Remarque

La précision finale étant généralement du centimètre, on peut effectuer un calcul plus rapide comme suit :

- en cumulant directement les corrections sans se soucier de l'ordre de calcul ;

- les longueurs  $D$  et  $L$  étant proches, on peut remplacer  $D^3$  par  $L^3$  dans l'expression de  $k_C$ , ce qui évite la résolution par approximations successives.

On obtiendrait ici :

$$365,145 \cdot (1 + 2,8 \cdot 10^{-4} + 8,64 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-4} - 4,34 \cdot 10^{-4}) = 365,157 \text{ m.}$$

### Application

Cet exercice est extrait de l'examen préliminaire de géomètre expert (1986).

Pour déterminer les corrections d'étalonnage de deux rubans de précision, un topographe mesure une base de longueur connue, par exemple  $L_{\text{base}} = 120,032 \text{ m}$ . Les résultats de ces mesures d'étalonnage sont les suivants :

- ruban n° 106 : 120,0656 m à  $-4,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- ruban n° 107 : 120,0685 m à  $-5,2 \text{ }^\circ\text{C}$ .

1) Calculez la correction d'étalonnage pour 100 m de ruban à  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , sachant que la dilatation de ces rubans donne une variation de 1,08 mm à 100 m pour  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

2) Déterminez la valeur de la distance horizontale AB mesurée avec ces deux rubans à partir des données du tableau ci-dessous. Les colonnes  $L_{\text{arrière}}$  et  $L_{\text{avant}}$  correspondent à des lectures sur mire sur les points de report du ruban.

RUBAN N° 106 (DE A VERS B)				RUBAN N° 107 (DE A VERS B)			
MESURES $L \text{ (m)}$	TEMP. $t \text{ (}^\circ\text{C)}$	$L_{\text{ARRIÈRE}}$ $\text{(mm)}$	$L_{\text{AVANT}}$ $\text{(mm)}$	MESURES $L \text{ (m)}$	TEMP. $t \text{ (}^\circ\text{C)}$	$L_{\text{ARRIÈRE}}$ $\text{(mm)}$	$L_{\text{AVANT}}$ $\text{(mm)}$
20,0000	11,0	1519	1464	20,0000	9,2	1498	1443
20,0000	13,1	1555	1518	20,0000	11,5	1546	1511
20,0000	15,4	1515	1494	20,0000	14,3	1530	1510
20,0000	16,9	1510	1417	20,0000	16,7	1500	1405
20,0000	18,3	1473	1373	20,0000	15,6	1473	1374
20,0000	18,0	1636	1445	20,0000	17,6	1606	1417
20,0000	19,5	1441	1441	20,0000	18,9	1438	1437
20,0000	20,0	1508	1448	20,0000	19,9	1509	1448
10,3071	21,9	1496	1499	10,3121	20,8	1505	1508

### Réponse

1) Le coefficient de dilatation est donc  $k = 1,08 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

– pour le ruban n° 106, une lecture de 120,065 6 à  $-4,1 \text{ }^\circ\text{C}$  donnerait :  
 $120,065 6 [1 + k(-4,1 - 0)] = 120,060 28 \text{ m à } 0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

– pour le ruban n° 107, une lecture de 120,068 5 à  $-5,2 \text{ }^\circ\text{C}$  donnerait :  
 $120,068 5 [1 + k(-5,2 - 0)] = 120,061 76 \text{ m à } 0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

La correction d'étalonnage à  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  et pour 100 m de longueur est donc de :

– pour le ruban n° 106,

$$C_e = 100 (120,032 - 120,060 28) / 120,060 28 = -0,02356 \text{ m/100 m.}$$

– pour le ruban n° 107,

$$C_e = 100 \cdot (120,032 - 120,06176) / 120,06176 = -0,02478 \text{ m/100 m.}$$

2) Le tableau de réponses est donné ci-après.

RUBAN N° 106				RUBAN N° 107			
LONGUEUR LO À 0 °C (m)	LONGUEUR L <sub>c</sub> CORRIGÉE (m)	DÉNIVEL. D <sub>n</sub> (m)	DISTANCE D <sub>h</sub> (m)	LONGUEUR LO À 0 °C (m)	LONGUEUR L <sub>c</sub> CORRIGÉE (m)	DÉNIVEL. D <sub>n</sub> (m)	DISTANCE D <sub>h</sub> (m)
$L[1+k(t-0)]$	$L0(1+C_e/100)$	$Lar - Lav$	$\sqrt{[Lc^2 - Dn^2]}$	$L[1+k(t-0)]$	$L0(1+C_e/100)$	$Lar - Lav$	$\sqrt{[Lc^2 - Dn^2]}$
20,00238	19,99766	0,055	19,99759	20,00199	19,99703	0,055	19,99695
20,00283	19,99812	0,037	19,99808	20,00248	19,99753	0,035	19,99750
20,00333	19,99861	0,021	19,99860	20,00309	19,99813	0,020	19,99812
20,00365	19,99894	0,093	19,99872	20,00361	19,99865	0,095	19,99842
20,00395	19,99924	0,100	19,99899	20,00337	19,99841	0,099	19,99817
20,00389	19,99918	0,191	19,99826	20,00380	19,99884	0,189	19,99795
20,00421	19,99950	0,000	19,99950	20,00408	19,99912	0,001	19,99912
20,00432	19,99961	0,060	19,99952	20,00430	19,99934	0,061	19,99925
10,30954	10,30711	-0,003	10,30711	10,31442	10,31186	-0,003	10,31186
		Total	170,29638			Total	170,29734

La distance AB est donc de  $(170,29638 + 170,29734)/2$ , soit  $170,2969 \text{ m} \pm 0,5 \text{ mm}$ .

#### Application

Quelle est la longueur à reporter sur le sol pour implanter une distance horizontale de 50,135 m avec un ruban en acier de 20 m étalonné sous une tension de 15 daN à 23,2 °C, la mesure d'une base de 100 m ayant donné un résultat de 99,9764 m. La température au moment de l'implantation est de 29,6 °C. La distance sera reportée sous une tension de 15 DaN, on peut ainsi éliminer la correction de tension.

#### Réponse

À 23,2 °C, la longueur est  $L' = 50,1350 / [1 + (100 - 99,9764) / 99,9764] = 50,123 \text{ m}$ .

À 29,6 °C, la longueur à reporter est  $L'' = 50,1232 / [1 + k(29,6 - 23,2)] = 50,120 \text{ m}$ .

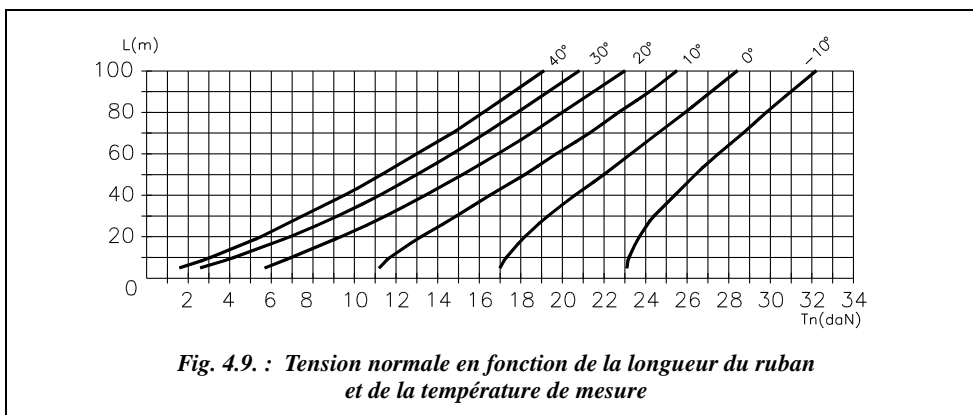
### 2.3.8 Extension de la notion de tension normale

Il est possible d'étendre cette notion en tenant compte dans la tension normale de la température du ruban lors de la mesure. Les équations précédentes (§ 2.3.6) donnent alors :

$$T_n = T_o + \left[ 1 - \frac{D}{L} + k \cdot (t - t_e) \right] \cdot S \cdot E$$

On peut utiliser un tableur pour établir l'abaque suivant (fig. 4.9.) donnant la tension normale  $T_n$  d'un ruban en acier ( $k = 10 \text{ mm/km/°C}$ ), de section  $(0,2 \times 13) \text{ mm}^2$  étalonné

sous une tension de 5 daN à 20 °C, en fonction de la longueur à mesurer  $L$ . C'est un moyen simple d'éviter les calculs précédents dans les cas où la précision du centimètre suffit.

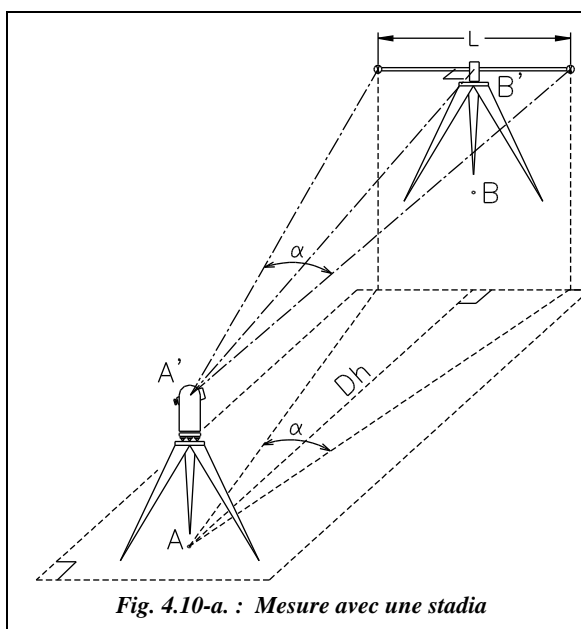


### 3 MESURES PARALLACTIQUES

#### 3.1 Mesure avec une stadia

Ce type de mesure parallactique nécessite l'emploi d'un théodolite et d'une stadia. Une stadia est une règle comportant deux voyants (triangulaires ou circulaires) dont l'écartement est connu (généralement 2 m). Il existe des stadias Invar pour des mesures de haute précision. La stadia est dotée d'une nivelle sphérique et d'un viseur pour régler sa perpendicularité par rapport à la ligne de visée  $A'B'$  (fig. 4.10-a.).

L'opérateur dispose en A un théodolite (ou un cercle d'alignement) et en B une stadia horizontale perpendiculaire à la distance à mesurer AB.



Le réglage en hauteur est inutile : l'angle mesuré est l'angle projeté sur le plan horizontal.

En projection sur le plan horizontal passant par exemple par le point A, on obtient :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2Dh} \Rightarrow \boxed{Dh = \cot \frac{\alpha}{2}} \text{ avec } L = 2 \text{ m (cas général).}$$

### 3.1.1 Précision de cette technique de mesure

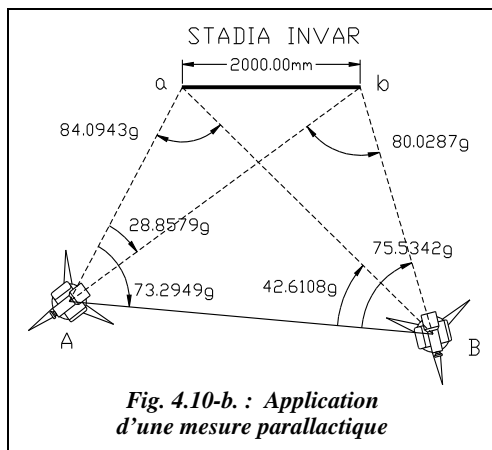
En considérant la longueur  $L$  exacte, le calcul de l'écart type théorique sur la distance

horizontale  $Dh$  donne : 
$$\sigma_{Dh} = \frac{L[1 + \tan^2(\alpha/2)]}{4\tan^2(\alpha/2)} \cdot \sigma_{\alpha \text{ rad}} = \frac{4Dh^2 + L^2}{4L} \cdot \sigma_{\alpha \text{ rad}} .$$

Si l'on utilise un théodolite T16 et que l'on mesure avec une paire de séquences (chap. 3, § 4.3), on peut estimer  $\sigma_{\alpha} = \pm 2,5$  mgon. Cela donne donc une précision de  $\pm 2,4$  cm à 35 m ou  $\pm 5$  cm à 50 m.

Si l'on utilise un théodolite T2 et une mesure à deux paires de séquences, on peut estimer  $\sigma_{\alpha} = \pm 5/\sqrt{2} = \pm 3,5$  dmgon, valeur usuelle ; on peut donc obtenir jusqu'à  $\pm 7$  mm à 50 m.

### 3.1.2 Application



Une mesure de métrologie nécessite la connaissance au millimètre près de la distance entre deux théodolites. Un théodolite est stationné en chacun des points A et B et par des visées angulaires sur une stadia Invar ; l'opérateur cherche à déterminer la précision de connaissance de la base AB.(fig. 4.10-b.).

#### 3.1.2.1 Description

La stadia Invar est constituée d'un tube semi-circulaire en acier entourant un fil Invar. Ce fil est rivé au tube d'un côté et mis sous tension constante de 10 daN par un ressort de l'autre côté. Pour une augmentation de la température égale à 10 °C, le fil de 2 000 mm de long s'allonge de 0,024 mm, le tube en acier s'allonge de 0,24 mm ce qui augmente la tension du ressort et allonge le fil Invar de 0,004 mm. Mais le système de suspension en laiton du voyant agit de 0,018 mm en sens opposé, ce qui fait que globalement l'allongement n'est que de 0,01 mm pour 10 °C. On peut donc considérer connaître la longueur de la stadia Invar au moins au dixième de millimètre près.



### 3.1.2.2 Manipulation

L'opérateur mesure au ruban la base AB puis effectue les visées angulaires détaillées (fig. 4.10-b.). Il calcule enfin la longueur de stadia déduite de ces mesures et en déduit un **facteur de mise à l'échelle** qui permettra d'obtenir la base AB avec une précision inférieure au millimètre.

AB est mesurée à 4,09 m au ruban. La résolution des triangles ABa et ABb permet d'obtenir :

$$\begin{array}{lll} Aa = 2,6190 \text{ m} & Ba = 3,8551 \text{ m} & AbB = 80,0288 \text{ gon} \\ Ab = 3,9862 \text{ m} & Bb = 2,7635 \text{ m} & AaB = 84,0943 \text{ gon} \end{array}$$

On en déduit deux valeurs de (ab) dans les triangles Aab et Bab :

$$Aab : ab = 1,9945 \text{ m} \quad Bab : ab = 1,9945 \text{ m}$$

La solution de ce problème étant unique, le double calcul de (ab) sert de contrôle. On applique donc un facteur de mise à l'échelle:  $AB = 4,09 \cdot f$  avec  $f = \frac{2,0000}{1,9945} = 1,00276$ .

Finalement, on obtient :  $AB = 4,1013 \text{ m}$ .

Un calcul d'erreur fastidieux dans cet exemple puisqu'il fait intervenir quatre triangles, montre que si l'on considère que la longueur de la stadia Invar est connue avec un écart type de 0,05 mm et si l'on effectue les mesures angulaires avec un théodolite de précision (2,5 dmgon sur une direction) et avec deux paires de séquences, on obtient AB avec un écart type de l'ordre de 0,1 mm.

On peut considérer que l'écart type sur AB est de la forme  $\sigma_{AB} = \frac{AB}{ab} \cdot \sigma_{ab}$ .

#### Remarque

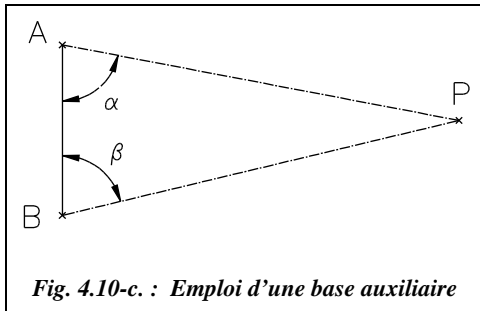
La mesure initiale de AB est inutile ; vérifiez qu'en partant d'une valeur initiale quelconque vous retrouvez le même résultat final : cette mesure sert de contrôle.

En conclusion, ce type de mesure, qui peut paraître aujourd'hui obsolète, donne une meilleure précision sur des bases courtes que certains distancemètres.

## 3.2 Mesure avec une base auxiliaire

Le principe de base de cette méthode est aussi utilisée dans la mesure d'altitude (ou de coordonnées) d'un point inaccessible (chap. 3 § 7.4). Cette méthode nécessite l'emploi d'un ruban et d'un théodolite classique. Il s'agit de transformer la mesure d'une longue distance en une mesure d'une distance courte associée à des mesures angulaires qui sont d'autant plus précises que l'on vise loin. On crée donc une base AB dont on connaît parfaitement la longueur. En stationnant un théodolite en A puis en B, on mesure les angles (PAB) et (PBA) (fig. 4.10-c.).

La résolution du triangle PAB permet d'obtenir :  $D_{AP} = D_{AB} \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$



La précision est meilleure que celle obtenue par la méthode précédente (§ 3.1) puisque la base AB est plus longue et l'angle en P est déterminé par un plus grand nombre de lectures.

Il faut préciser qu'en supposant que le triangle APB est isocèle ( $\alpha = \beta$ ) et que l'écart type de mesure des angles horizontaux est identique en station en A et en B, on obtient pour l'écart type sur  $D_{AP}$  :

$$D_{AP} = \frac{D_{AB}}{2 \cdot \cos \alpha} \Rightarrow (\sigma_{D_{AP}})^2 = \left[ \frac{\sigma_{D_{AB}}}{2 \cdot \cos \alpha} \right]^2 + \left[ D_{AB} \cdot \frac{\sigma_{\alpha} \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \cos^2 \alpha} \right]^2,$$

$$(\sigma_{D_{AP}})^2 = \left[ \frac{D_{AP} \sigma_{D_{AB}}}{D_{AB}} \right]^2 + [D_{AP} \sigma_{\alpha} \tan \alpha]^2 \text{ avec } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left[ \frac{2D_{AP}}{D_{AB}} \right]^2 - 1$$

Sur une distance **AP de 50 m** mesurée à partir d'une base égale à 10 m (pour un ruban de classe II,  $\sigma_{D_{AB}} = \pm 1$  mm, avec un théodolite T16 pour lequel  $\sigma_{\alpha} = \pm 2,5$  mgon), on obtient une précision théorique de  **$\pm 1,5$  cm**. On obtiendrait  **$\pm 6$  mm** avec un théodolite T2 pour lequel  $\sigma_{\alpha} = \pm 0,5$  mgon.

Pour une distance à mesurer de l'ordre de 250 m, la base créée est de la longueur du ruban dont on dispose. Si l'on dispose d'un ruban de 20 m de classe II pour lequel  $\sigma = \pm 1,7$  mm et d'un théodolite T16 pour lequel  $\sigma = \pm 1,7$  mgon (mesurage avec deux paires de séquences), on obtient une précision théorique de  $\pm 17$  cm sur la mesure de  $D_{AP}$ . Si l'on dispose d'un ruban de 50 m de classe I pour lequel  $\sigma = \pm 2$  mm et d'un théodolite T2 pour lequel  $\sigma = \pm 3,5$  dmgon (mesurage avec deux paires de séquences), la précision théorique devient  $\pm 1,7$  cm.

#### Application

En supposant que le triangle APB est isocèle et que la longueur de la base AB est connue sans erreur, déterminez la longueur AB à mettre en place pour minimiser l'erreur sur la détermination de la distance  $D_{AP}$ .

#### Réponse

La précision optimale serait obtenue avec une base AB telle que  $D_{AB} = 2 D_{AP}$ , ce qui donne un triangle plat (impossible dans la réalité) et prouve donc que la distance AB doit être la plus grande possible.

## 4 MESURES STADIMÉTRIQUES

La stadimétrie est une méthode moins précise que les précédentes. Elle permet la mesure indirecte d'une distance horizontale en lisant la longueur interceptée sur une mire par les fils stadimétriques du réticule de visée.

Le point A, centre optique d'un théodolite, est situé à la verticale du point stationné en S ; l'opérateur vise une mire posée en P et effectue la lecture interceptée par chaque fil sur la mire soit  $m_1$  et  $m_2$ .

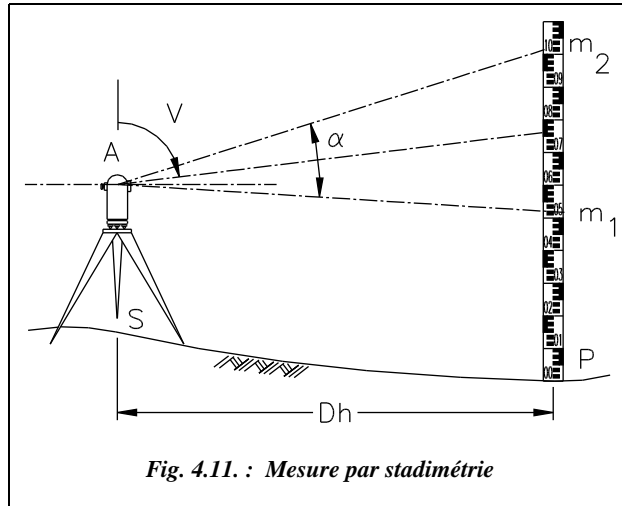


Fig. 4.11. : Mesure par stadimétrie

La distance horizontale peut s'exprimer par<sup>1</sup> :

$$Dh = \frac{m_2 - m_1}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \sin^2 V$$

Si la visée est horizontale, ( $V = 100$  gon) ; on obtient :

$$Dh = \frac{m_2 - m_1}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

### 4.1 Stadimétrie à angle constant

Si l'angle  $\alpha$  est constant dans l'appareil utilisé, on a :  $Dh = K (m_2 - m_1) \sin^2 V$ .

La constante  $K = \frac{1}{2 \tan(\alpha/2)}$  est appelée **constante stadimétrique**. Elle vaut généralement 100 (voir chap. 5 § 1.2.6) ; c'est pourquoi l'expression de  $Dh$  devient :

$$Dh = 100(m_2 - m_1) \sin^2 V$$

#### 4.1.1 Précision obtenue sur la mesure de $Dh$ avec un niveau

Pour un niveau,  $V = 100$  gon, d'où :  $Dh = 100(m_2 - m_1)$ .

<sup>1</sup> Voir la démonstration sur le nivellement indirect au chapitre 6, paragraphe 4.1.2.

Le calcul de l'écart type sur  $Dh$  donne permet d'obtenir :  $\sigma_{Dh}^2 = 2 (K \cdot \sigma_m)^2$ .

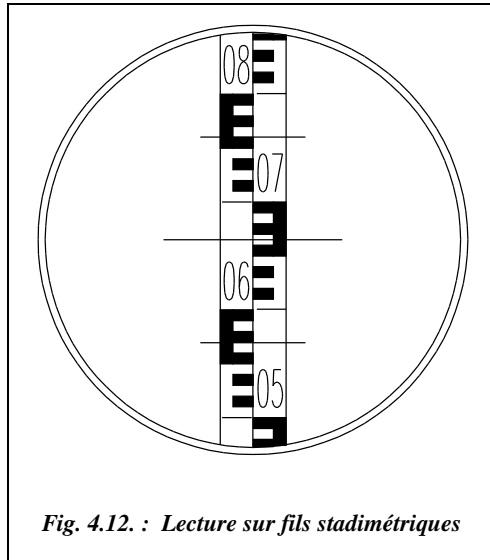


Fig. 4.12. : Lecture sur fils stadimétriques

$\sigma_m$  est l'écart type sur la connaissance des lectures  $m$  : on peut l'évaluer au mieux à 1 mm jusqu'à 35 m pour un niveau ou un théodolite classique. Ce qui implique que la précision sur  $Dh$  est de l'ordre de  $\pm 14$  cm à 35m.

Avec un niveau de précision (de type NA2 avec micromètre optique et mire Invar), on peut estimer que  $\sigma_m \approx \pm 0,1$ mm à 35 m.

La précision devient alors  $\pm 1,4$  cm à 35 m.

**Exemple de lecture** dans l'optique d'un niveau de chantier type NAK (fig. 4.12.) : l'opérateur lit :  $m_2 = 7,60$  dm et  $m_1 = 5,69$  dm et on obtient  $Dh = 19,1$  m  $\pm 14$  cm.

#### 4.1.2 Précision sur la mesure de $Dh$ avec un théodolite

L'écart type sur  $Dh$  est calculé à partir de l'expression générale (qui est une expression approchée) :  $Dh = 100 (m_2 - m_1) \sin^2 V$ .

$$\sigma_{Dh}^2 = 2 [K \sigma_m \sin^2 V]^2 + [2K (m_2 - m_1) \sin V \cos V \sigma_{V \text{ rad}}]^2.$$

Comme  $K (m_2 - m_1) \sin V = Dh / \sin V$ , on obtient finalement :

$$\sigma_{Dh}^2 = 2 [K \sigma_m \sin^2 V]^2 + [2 Dh \cotan V \sigma_{V \text{ rad}}]^2.$$

Si l'on utilise un théodolite T16, on a  $\sigma_v = \pm 2,5$  mgon. Chaque lecture sur mire est estimée à  $\sigma_m = \pm 1$ mm près jusqu'à 35 m de portée.

- Pour une portée de 35 m et un angle zénithal  $V$  de 100 gon, on retrouve la précision du niveau  $\pm 14$  cm à 35 m.
- Pour une portée de 35 m et pour  $V = 80$  gon, on obtient une précision de  $\pm 13$  cm.
- Pour une portée de 35 m et pour  $V = 50$  gon, on obtient une précision de  $\pm 7$  cm.

**Attention !** la précision semble s'améliorer avec la diminution de  $V$  mais, en fait, plus la visée devient verticale et moins les lectures sur mire sont aisées. Par exemple, pour  $V = 50$  gon et  $Dh = 35$  m, la distance de visée est en réalité de 49,5 m.

La valeur obtenue de  $Dh$  reste indicative, au mieux à  $\pm 10$  cm près.

## 4.2 Stadimétrie à angle variable

L'angle  $\alpha$  est variable sur certains appareils dits « **auto-réducteurs** », par exemple le tachéomètre Wild RDS, le terme « auto-réducteur » signifiant que le calcul de réduction de la distance inclinée à l'horizontale est automatisé. L'angle stadimétrique varie en permanence en fonction de l'inclinaison de la visée de manière à intercepter une longueur constante  $L$  sur la mire. Les fils stadimétriques deviennent des courbes qui défilent dans l'optique au fur et à mesure de l'inclinaison de la lunette (voir courbes C0, C1 et C2, fig. 4.13.). La mire utilisée est spéciale : elle comporte une graduation particulière (sur la figure 4.13., elle est placée à 1 m du sol) sur laquelle l'opérateur fait tangenter la courbe origine  $C_0$  de manière à pouvoir lire directement sur la mire la longueur  $Dh$ , sans avoir à faire de soustraction et en une seule lecture. La mire comporte aussi une graduation coulissante qui permet de positionner la graduation particulière à la hauteur des tourillons du théodolite.

La formule donnant  $Dh$  reste la même, c'est-à-dire  $Dh = 100 \cdot L$ ,  $L$  étant la longueur interceptée sur la mire.

En stadimétrie à angle variable, la précision est légèrement meilleure qu'en stadimétrie à angle constant, puisque l'opérateur n'effectue qu'une lecture et le pointé de la graduation origine est plus précis qu'une seconde lecture. On peut estimer l'erreur de pointé à

0,5 mm à 35 m. La précision devient alors  $\pm 100 \sqrt{(1)^2 + (0,5)^2} = \pm 112$  mm.

La figure 4.13. ci-contre représente l'objectif du Wild RDS ; C0 est la courbe origine, C1 la courbe des dénivelées (avec coefficient) et C2 la courbe des distances horizontales. Les lectures sont :

$$Dh = 100 \times 2,53 \text{ dm}$$

$$\text{soit : } 25,30 \text{ m} \pm 11 \text{ cm}$$

$$\Delta H = 100 \times 0,1 \times 1,05 \text{ dm}$$

$$\text{soit : } 1,05 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$$

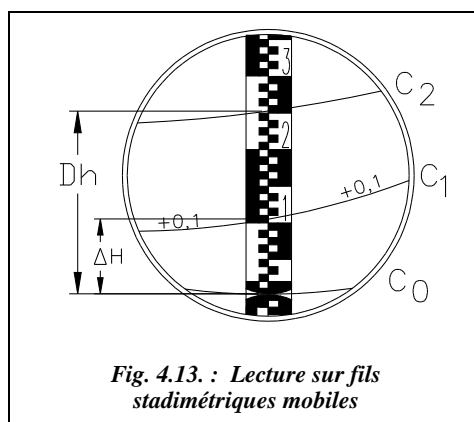


Fig. 4.13. : Lecture sur fils stadimétriques mobiles

## 5 MESURE PAR VARIATION DE PENTE

C'est un procédé qui est peu précis bien que plus précis que la stadimétrie.

La méthode générale consiste à lire (fig. 4.14.) les angles  $V$  et  $V'$  correspondant à des graduations  $m$  et  $m'$  de la mire interceptées par le fil horizontal du réticule (axe de visée). On pose pour la suite  $L = m' - m$ .

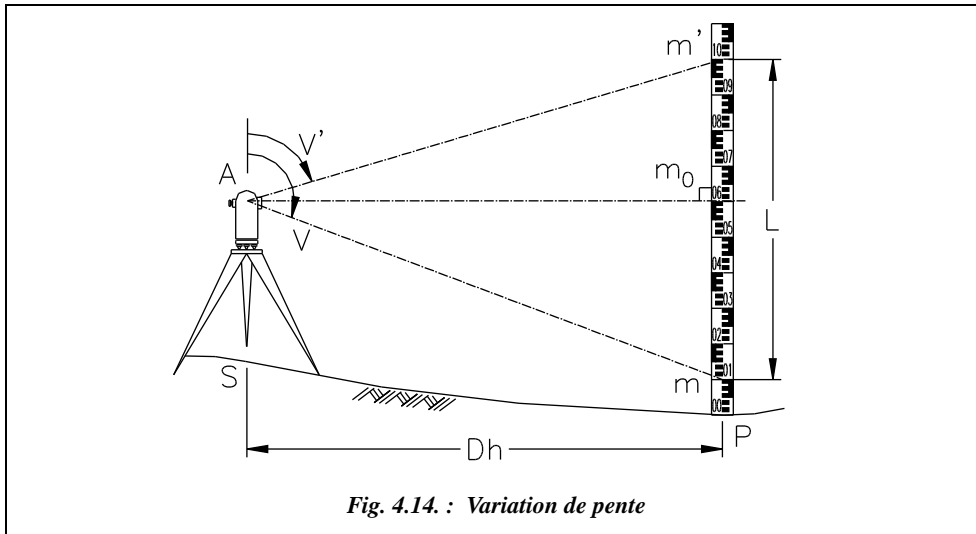


Fig. 4.14. : Variation de pente

Pour calculer  $Dh$ , on fait intervenir la lecture  $m_0$  faite sur la mire lorsque l'appareil est horizontal  $V = 100$  gon, mais sa connaissance est inutile puisqu'elle s'élimine dans le calcul :

$$\left. \begin{aligned} \tan V' &= \frac{Dh}{(m' - m_0)} \Rightarrow m' - m_0 = \frac{Dh}{\tan V'} \\ \tan V &= \frac{Dh}{(m - m_0)} \Rightarrow m - m_0 = \frac{Dh}{\tan V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{Dh = \frac{L}{\cotan V' - \cotan V}} \quad (1)$$

Ce procédé s'applique à tout appareil mesurant des angles verticaux (ou des pentes).

## 5.1 Variation de pente à base variable

L'opérateur lit les graduations  $m$  et  $m'$  de la mire interceptées pour des lectures angulaires imposées de  $V$  et  $V'$ . La base, c'est-à-dire la longueur  $L$  interceptée sur la mire, varie d'une mesure à l'autre. Le tachéomètre Sanguet fonctionnait sur ce principe : on effectuait quatre lectures sur la mire, chaque passage d'une lecture à l'autre étant fait avec une différence de pente constante. La formule utilisée est une transformation de la formule générale faisant intervenir les pentes des visées.

Soit  $i$  l'angle de site de la visée de pente  $p$  ( $i = V - 100$  gon), on a  $p = \tan i = \cotan V$  et  $p' = \tan i' = \cotan V'$ .

Finalement, en reprenant l'équation (1) :  $\boxed{Dh = \frac{L}{p' - p}}$

### Application

Vous disposez d'un tachéomètre autoréducteur Tari. Dans l'optique de cet appareil existe une graduation dont l'intervalle correspond à une variation de pente constante de valeur  $1/200$ . Vous lisez sur une mire les valeurs  $m_1 = 1,000$  ;  $m_2 = 1,245$  ;  $m_3 = 1,488$  pour trois graduations consécutives de l'échelle de variation de pente.

Calculez la distance horizontale  $Dh$  séparant la mire du tachéomètre.

### Réponse

On obtient trois valeurs de  $Dh$ ,  
 $Dh_1 = 200 (1,245 - 1,000) = 49,00 \text{ m} \pm 28 \text{ cm}$   
 $Dh_2 = 200 (1,488 - 1,245) = 48,60 \text{ m} \pm 28 \text{ cm}$   
 $Dh_3 = 100 (1,488 - 1,000) = 48,80 \text{ m} \pm 14 \text{ cm}$

La valeur finale est la moyenne pondérée des trois, soit  $48,80 \text{ m} \pm 14 \text{ cm}$ .  $Dh_3$  est théoriquement aussi précise que cette moyenne.

## 5.2 Variation de pente à base fixe

Dans ce cas, l'opérateur vise des graduations entières sur la mire et lit les angles zénithaux correspondants. La base, c'est-à-dire la longueur  $L = m' - m$  interceptée sur la mire, est dite « fixe » puisqu'elle peut garder une valeur constante pendant une série de mesures. Cette technique est adaptée à l'emploi d'un théodolite. Elle permet d'obtenir une meilleure précision que la stadimétrie, pour deux raisons :

- la constante stadimétrique  $K$  qui multiplie les erreurs de lecture sur mire par un facteur  $100 \text{ n}$  intervient plus ;
- le pointé d'une graduation entière de la mire est plus précis.

L'expression de  $Dh$  est donnée par : 
$$Dh = \frac{L}{\cotan V' - \cotan V}$$

La précision de cette méthode est donnée par l'écart type  $\sigma_{Dh}$  sur  $Dh$  :

$$\sigma_{Dh}^2 = \frac{2(\sigma_m)^2}{(\cotan V' - \cotan V)^2} + \frac{(L \cdot \sigma_{V \text{ rad}})^2 [(1 + \cotan^2 V')^2 + (1 + \cotan^2 V)^2]}{(\cotan V' - \cotan V)^4}$$

en considérant que  $\sigma_m = \sigma_{m'}$ .

L'erreur est donc minimisée si les angles  $V$  et  $V'$  sont éloignés l'un de l'autre ; elle tend vers l'infini s'ils se rapprochent. Donc l'opérateur doit viser  $V'$  le plus haut possible et  $V$  le plus bas possible sur la mire. Il est possible d'obtenir avec un théodolite au mgon une précision de quelques centimètres sur 100 m.

### Application

Calculez la distance  $Dh$  caractérisée par les données suivantes et évaluez son incertitude. La longueur interceptée sur la mire est  $L = 3,8$  m ; l'angle  $V = 103,333$  gon et l'angle  $V' = 96,445$  gon sont mesurés au théodolite T16.

### Réponse

$Dh = 35,087$  m. Si on utilise un théodolite T16,  $\sigma_v = \pm 2,5$  mgon, on peut estimer les erreurs de pointé sur la mire à  $\sigma_m = \pm 0,5$  mm à 35m.

On trouve alors  $\sigma_{Dh} = \pm 1,9$  cm. Donc, on peut écrire :  $Dh = 35,09$  m  $\pm 2$  cm.

## 6 MESURE AU MOYEN D'UN IMEL

Un IMEL, **Instrument de Mesure Électronique des Longueurs** ou distancemètre, est un appareil qui fonctionne le plus souvent par émission d'une onde électromagnétique, qui permet la mesure du déphasage de l'écho de cette onde renvoyée par un réflecteur.



Fig. 4.14- a. : T1010 et DI 1001, 1600, 2002, doc. Leica



Ces appareils peuvent être intégrés à l'optique d'un théodolite ou être montés en externe sur des bases de théodolites optico-mécaniques classiques ou électroniques .

Ils fonctionnent sur la base de différentes technologies, dont les suivantes :

- les **appareils électro-optiques** utilisent une onde électromagnétique modulée (voir § 6.1.3) par une onde porteuse lumineuse de type lumière blanche, infrarouge ou laser. Ce sont les plus utilisés dans le domaine de la topométrie. La photographie de la page précédente (documentation Leica) présente trois types de distancemètres indépendants pouvant être associés à des théodolites optico-mécaniques ou électroniques ;
- les **appareils à micro-ondes** utilisent des micro-ondes dont les fréquences varient de 5 à 35 GHz (Gigahertz ou  $10^9$  Hz) ;
- les **appareils à longues ondes** utilisent des ondes radio très longues, de l'ordre du kilomètre : d'une moins bonne précision que les appareils précédemment cités, ils sont très peu utilisés en topométrie.

La **précision** des distancemètres varie actuellement de  $\pm (5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$ , soit  $\pm 1 \text{ cm}$  pour 1 km pour le DI 1001) à  $\pm (1 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$ , soit  $\pm 2 \text{ mm}$  pour 1 km pour le Wild DI 2002. Le ppm (ou partie par million) représente 1 mm/km. La notation de l'écart type sous la forme  $\pm (\text{Cste} + \text{k.ppm})$  est adoptée par tous les constructeurs. L'erreur ppm, dite **proportionnelle**, est essentiellement due à la précision de connaissance de l'indice de l'air.

La **portée** des visées varie selon les ondes employées : les appareils utilisant l'infrarouge (les moins coûteux à réaliser) portent jusqu'à 7 km, par exemple le DI 2002 avec un miroir à onze prismes, dans des conditions atmosphériques très favorables c'est-à-dire sans brume, par temps couvert, avec une visibilité 30 km et en l'absence de flamboiement de l'air. Les appareils utilisant le laser portent jusqu'à 60 km en gardant une précision de  $\pm (6 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$ , soit  $\pm 6,6 \text{ cm}$  sur 60 km. Ces appareils nécessitent toutefois plus de puissance à l'émission et sont plus coûteux. Les appareils à micro-ondes portent jusqu'à 150 km avec une précision de l'ordre de  $\pm (1 \text{ cm} + 3 \text{ ppm})$ .

## 6.1 Principe de la mesure d'une distance à l'aide d'un IMEL

### 6.1.1 Propriétés de la propagation des ondes

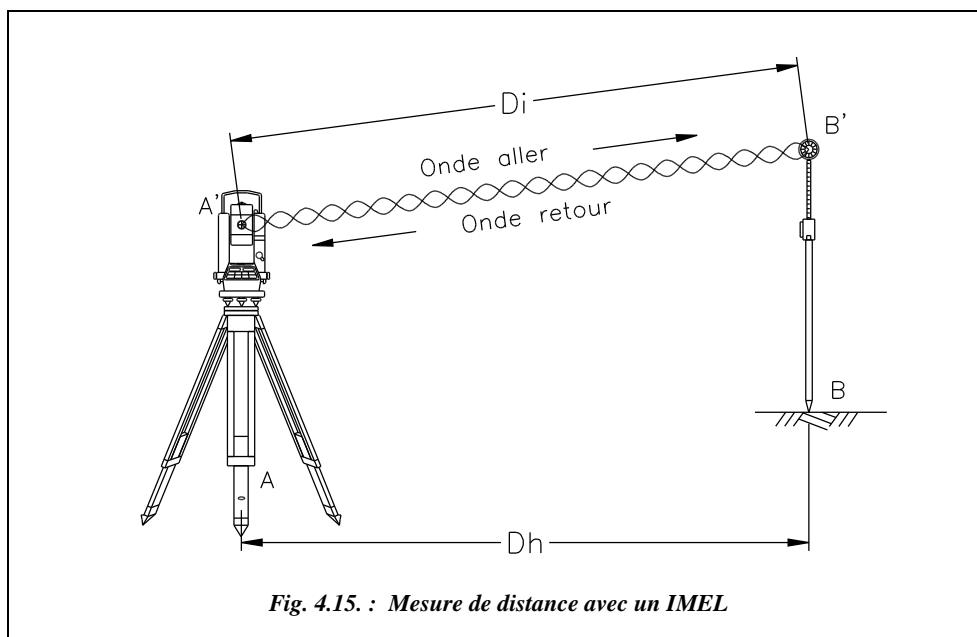
Les propriétés fondamentales de la propagation des ondes utilisées par ces appareils sont les suivantes :

- la **fréquence**, notée  $f$ , et la **vitesse de propagation** d'une onde dans le vide, notée  $c$  pour célérité, sont constantes entre le point d'émission et le point de réception. La **longueur d'onde** est notée  $\lambda$ . Ces termes sont liés par la relation  $c = \lambda f$ . Dans le vide, la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique est de  $c_{\text{vide}} = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

- l'atmosphère diminue la **vitesse de propagation** des ondes. Cette diminution est fonction de la fréquence de l'onde, de la composition chimique de l'atmosphère et des conditions de température, d'humidité et de pression atmosphérique ;
- l'amplitude d'une onde diminue en traversant l'atmosphère : c'est un phénomène d'**absorption** de dispersion de l'énergie ;
- le rapport entre la vitesse de propagation d'une onde dans l'atmosphère, notée  $V$ , et sa vitesse dans le vide est appelé **indice de réfraction**, noté  $n$ , de cette onde de fréquence  $f$  ; on a  $n = c / V$ . L'indice de réfraction de l'atmosphère est déterminé expérimentalement et a pour valeur approximative  $n = 1,0003$  dans des conditions normales de température et de pression.

### 6.1.2 Mesure de déphasage

Pour mesurer une distance  $Di$  entre deux points au moyen d'un IMEL, l'opérateur stationne l'appareil sur le point A et on place un miroir à la verticale du point B (fig. 4.15.). Un train d'ondes est envoyé de A' vers B' : c'est son retour au point A' après réflexion sur le miroir B' qui permet de calculer la distance  $Di$  parcourue.



Il n'est pas concevable de mesurer la distance simplement par calcul du temps mis par l'onde à faire le parcours aller-retour et ce pour la raison suivante : supposons que l'opérateur utilise un distancemètre du type DI 2002 dont le système de mesure fonctionne avec une fréquence de base 50 Mhz, de longueur d'onde 3 m. La vitesse de propagation de l'onde dans l'atmosphère est  $V = \lambda \cdot f = 3 \times 50 \cdot 10^6 = 150\,000$  km/s. Le

temps mis par l'onde pour faire l'aller-retour sur une distance de 1 km est de  $7 \cdot 10^{-6}$  s, ce qui est techniquement impossible à mesurer avec précision, du moins avec une technologie simple et peu coûteuse : seule une horloge atomique, permettant d'aller jusqu'à  $10^{-13}$  seconde, donnerait la distance au millimètre près, sans compter les variations de vitesse dues au fait que l'onde ne se déplace pas dans un milieu vide et homogène.

La mesure de la distance sera faite par la **mesure du déphasage de l'onde retour** par rapport à l'onde aller. Le signal émis par l'IMEL est une série d'ondes sinusoïdales dont la **longueur d'onde**  $\lambda$  correspond à la distance rectiligne parcourue par l'onde pendant

un temps  $T$  appelé **période** (fig. 4.16.) :  $T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c_{\text{air}}}$ ,  $T$  est l'inverse de la fréquence.

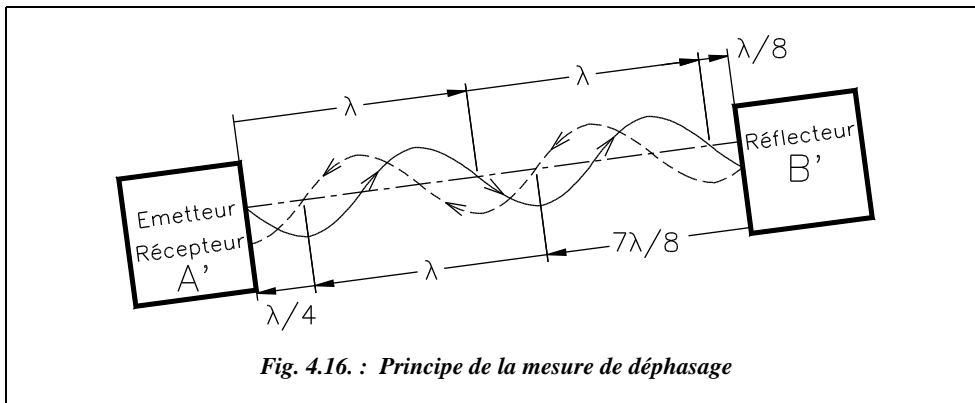


Fig. 4.16. : Principe de la mesure de déphasage

Entre l'émetteur et le récepteur (par l'intermédiaire du réflecteur), il existe un nombre entier  $n$  de longueurs d'onde plus une fraction  $\Delta\lambda$  de longueur d'onde : sur la figure 4.15.,  $n = 4$  et  $\Delta\lambda = \lambda/4$ . Cela correspond à un déphasage de  $\pi/4$ , techniquement simple à déterminer. On peut en déduire avec précision la distance correspondante, à savoir  $\lambda/8$  dans cet exemple.

On sait donc maintenant que :

$$D_{A'B'} = \frac{1}{2}(n\lambda + \Delta\lambda)$$

Le problème consiste à présent de compter le **nombre entier**  $n$  de longueurs d'onde nécessaire au parcours aller-retour de  $D_{A'B'}$ . On appelle cela une **ambiguïté sur la distance** (voir aussi l'ambiguïté en GPS, chapitre 7).

L'ambiguïté peut être levée par l'utilisation de **fréquences multiples** suivant le principe suivant : admettons que l'on mesure une distance de 6 321,45 m avec un distancemètre dont la fréquence de base est de longueur d'onde 20 m. On peut donc mesurer sans ambiguïté une distance inférieure à 10 m puisque le trajet aller-retour sera inférieur à 20 m ; avec une fréquence de longueur d'onde 200 m, il est possible de mesurer sans ambiguïté une distance inférieure à 100, et ainsi de suite. L'onde émise comporte d'autres fréquences qui seront des sous-multiples de la fréquence de base.

Par exemple :	fréquence de base	$\lambda = 20 \text{ m}$	mesure	1,45 m
	2 <sup>e</sup> fréquence	$\lambda = 200 \text{ m}$	mesure	21,4 ..m
	3 <sup>e</sup> fréquence	$\lambda = 2\,000 \text{ m}$	mesure	321.....m
	4 <sup>e</sup> fréquence	$\lambda = 20\,000 \text{ m}$	mesure	<u>6 320.....m</u>

La lecture finale est composée de toutes les lectures sur chaque fréquence : 6 321,45 m.

Ces mesures sont effectuées plusieurs fois et une moyenne est affichée au bout d'un temps variant de 0,5 à 3 secondes suivant le mode de mesure sélectionné : normal, rapide ou répétitif. Elles sont effectuées en continu en mode « tracking » (recherche, suivi).

On n'utilise pas une seule longueur d'onde de 20 000 m parce que la précision obtenue par la mesure du déphasage est moins bonne sur de grandes longueurs d'onde ; d'où le faible intérêt des appareils à longues ondes.

### 6.1.3 Modulation de l'onde

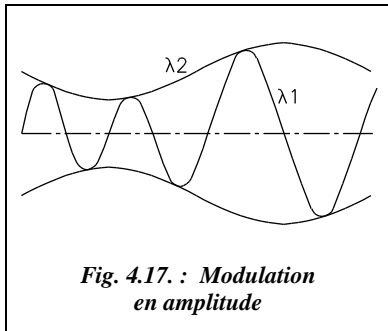


Fig. 4.17. : Modulation en amplitude

L'amplitude d'une onde se propageant dans l'atmosphère diminue par absorption de son énergie. L'incidence de cette absorption varie en fonction de la fréquence, à savoir que plus la fréquence est élevée, plus la longueur d'onde est courte et plus l'absorption est importante. Pour augmenter la portée des ondes courtes utilisées, on les superpose à une onde dite porteuse de fréquence plus basse, qui porte plus loin. Cette superposition est appelée modulation (fig. 4.17. : l'onde courte  $\lambda_1$  est superposée à une onde plus longue  $\lambda_2$  réalisant une modulation en amplitude).

### 6.1.4 Schéma fonctionnel d'un IMEL

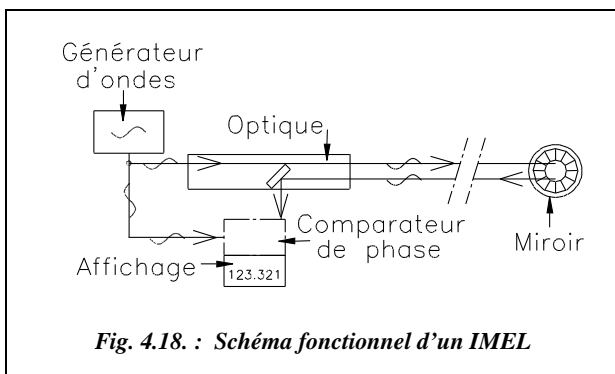


Fig. 4.18. : Schéma fonctionnel d'un IMEL

Le schéma de la figure 4.18. ci-contre permet de comprendre comment fonctionne un IMEL.

Le générateur d'onde produit une onde qui est séparée en deux faisceaux (qui sont donc en phase) dirigés l'un vers le réflecteur et l'autre vers un appareil comparateur de phase. C'est à l'aide de cet appareil qu'est déterminé le

déphasage entre l'onde initiale et l'onde ayant effectué le trajet aller-retour au réflecteur.

## 6.2 Phénomènes parasites

### 6.2.1 Erreurs dues au système de mesure

L'émetteur et le système de mesure de phase induisent deux types d'erreur :

- une erreur **cyclique**, qui reprend périodiquement la même valeur ;
- une erreur **proportionnelle** due à un défaut de fréquence de l'émetteur. Un décalage de fréquence de  $\Delta f$  entraîne une erreur  $\Delta D$  sur la distance, soit  $D \approx K \cdot \lambda$  donc  $\Delta D = -D \Delta f / f$ . L'erreur est proportionnelle à la distance mesurée.

Ces deux erreurs impliquent des calibrages réguliers de l'émetteur et du système de mesure de phase.

### 6.2.2 Densité de l'atmosphère

La propagation d'une onde électromagnétique est gênée par les molécules de l'atmosphère : plus le milieu traversé est dense, plus l'indice de réfraction du milieu augmente et plus l'onde est ralentie. Cela influe donc **sur le déphasage** qui est **faussé** puisque la distance mesurée augmente si la vitesse de propagation diminue. L'indice de réfraction est fortement dépendant de la température et de la pression, mais indépendant de l'humidité pour des ondes lumineuses. Pour des ondes centimétriques, l'humidité est à prendre en compte.

La mesure directe de la distance inclinée  $Di$  doit donc subir une correction atmosphérique qui peut être faite de trois manières différentes, toutes basées sur la même formule de correction :

1- **automatiquement** par l'appareil en entrant la température et la pression sur le lieu de mesure. Ce dernier affiche directement la valeur corrigée. Le théodolite T1010 de Leica fonctionne sur ce principe. Certains appareils mesurent eux-mêmes ces paramètres et corrigent en permanence la valeur lue ;

2- **semi-automatiquement** en entrant dans l'appareil une **correction en ppm** correspondant à l'erreur commise sur la distance. Cette valeur est calculée par la formule ci-après,

fonction de l'appareil :  $\Delta Di = 282,2 - \frac{0,2908P}{1 + 0,00366t}$  pour le Wild DI4L ;

où  $\Delta Di$  est donnée en ppm (mm/km) ;

$P$  est la pression en millibars (ou hectoPascal) et  $t$  la température en °C.

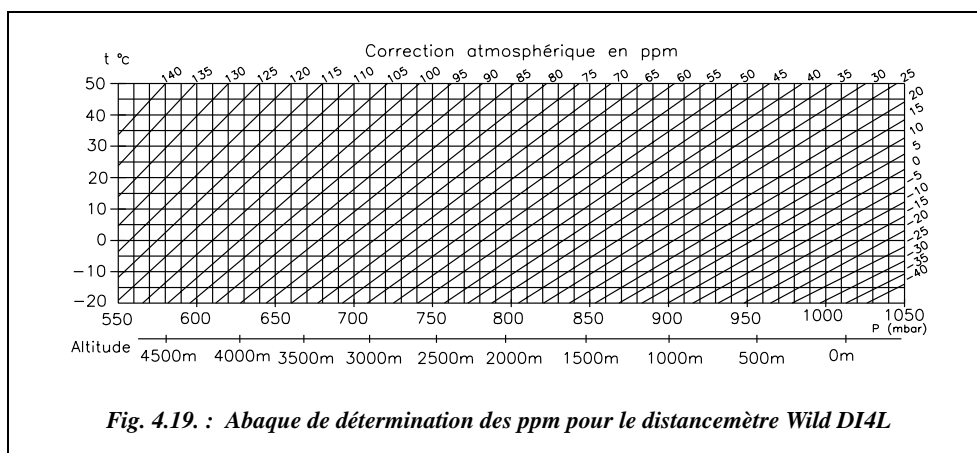
#### Exemple

— pour une pression extérieure de 1 000 mb (hPa), une augmentation de température de 20 °C à 30 °C entraîne une erreur de + 9 ppm (on passe de 11,2 ppm à 20,2 ppm, soit

+ **9 mm/km** ce qui est supérieur à l'ordre de grandeur de l'écart type du distancemètre (fig. 4.19.) ;

– pour une température extérieure de 25 °C, si la pression diminue de 1 000 mb (au niveau de la mer) à 950 mb (à une altitude de 500 m environ), cela entraîne une erreur de +13 ppm, soit **+13 mm/km** (fig. 4.19.).

La correction peut aussi être lue sur un abaque fourni par le constructeur dans la documentation technique de l'appareil (voir l'abaque fig. 4.19. donné pour le distancemètre indépendant Wild DI4L).



3- **manuellement**, à partir des résultats des mesures brutes en utilisant les abaques de correction ou la formule donnée précédemment en 2-.

On peut retrouver sur l'abaque ci-dessus les résultats donnés dans les deux exemples précédents. Si vous disposez d'une calculatrice programmable, il est préférable de programmer la formule de correction.

### 6.2.3 Absorption de l'atmosphère

L'inertie de l'atmosphère crée un phénomène d'absorption qui tend à diminuer l'amplitude de l'onde émise, c'est-à-dire que l'énergie de l'onde est consommée par la mise en mouvement ondulatoire des molécules de l'atmosphère. Ce phénomène n'influe pas sur le déphasage ; il ne fausse donc pas les mesures mais il **limite simplement la portée des visées**.

Les portées maximales sont atteintes par temps très couvert, sans brume, avec une visibilité de l'ordre de 30 km (en matinée, après une pluie, en altitude). Le distancemètre DI 2002 porte dans ces conditions jusqu'à 7 km avec onze miroirs.

Les conditions les plus défavorables sont les suivantes : fort soleil, forte brume, flamboisement de l'air, visibilité inférieure à 3 km. Dans ces conditions, la portée du même DI 2002 avec onze miroirs est réduite à 1,8 km.

### 6.2.4 Dispersion du faisceau lumineux

La source d'émission de l'onde n'étant ni strictement ponctuelle ni parfaitement focalisée, le faisceau émergent est de **forme conique** centré sur l'axe de l'IMEL. La tache lumineuse envoyée par ce dernier augmente donc au fur et à mesure de la distance parcourue par l'onde. Cela crée une dispersion de l'énergie puisque seule une partie de l'onde émise frappe le réflecteur et limite ainsi la portée de l'appareil. Sur de grandes portées, on utilise donc des réflecteurs à plusieurs miroirs juxtaposés (jusqu'à 11 miroirs).

### 6.2.5 Trajet de l'onde

La distance inclinée mesurée par l'appareil doit subir les corrections suivantes dues à la sphéricité terrestre, à la réfraction atmosphérique (voir l'étude complète au chapitre 6 § 5) et aux réflexions parasites de l'onde.

1 - La **réfraction atmosphérique** et la **sphéricité terrestre** – que l'on sait prendre en compte (voir chap. 6 § 5.1 et § 5.2). Les appareils modernes intègrent une correction automatique de l'erreur de niveau apparent à partir des formules de bases suivantes donnant la distance horizontale  $Dh$  et la dénivelée instrumentale  $\Delta hi$  :

$$Dh = Di \cdot \sin V + \frac{(mra - 2)}{2R} \cdot Di^2 \cdot \sin V \cdot \cos V \quad ;$$

$$\Delta hi = Di \cdot \cos V + \frac{(1 - mra)}{2R} \cdot Di^2 \cdot \sin^2 V \quad ;$$

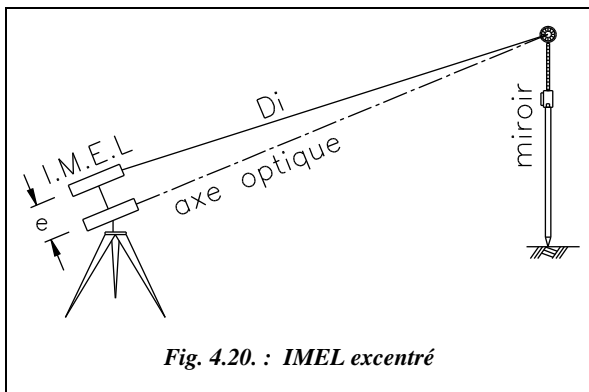
$mra$  est le module de réfraction atmosphérique qui a pour valeur environ 0,16. Si les conditions de température et de pression s'éloignent de la normale, la valeur de  $mra$  peut être déterminée expérimentalement et entrée dans le calculateur de l'appareil (voir l'exemple au chapitre 6, paragraphe 5.2.3.4.).

2 - La **réflexion des ondes sur des obstacles** – qui peut être éliminée par des mesures répétitives (ou cycliques). Les mesures répétitives permettent aussi de négliger les interruptions des faisceaux par exemple, les passages de véhicules etc.

### 6.2.6 Excentrement de l'IMEL

L'émetteur peut être décalé de l'axe optique de l'appareil, ce qui entraîne une erreur d'excentrement qu'il est possible de chiffrer. Si l'IMEL est excentré de  $e$  par rapport à l'axe de l'appareil, le miroir doit aussi être excentré de  $e$  par rapport à la cible de façon que le rayon lumineux envoyé par l'IMEL frappe directement le centre du miroir lorsque

l'opérateur vise le centre de la cible. Les deux paragraphes suivants concernent l'étude de l'erreur due à l'excentrement.



- Si le miroir est au centre de la cible, l'IMEL, qui est décalé de l'excentrement  $e$  par rapport à l'axe optique de la lunette, devrait viser « de travers » pour mesurer la distance inclinée  $Di$  (fig. 4.20.). L'écart sur la distance  $Di$  mesurée est toujours positif :

$$Di_{\text{exacte}} = \sqrt{Di_{\text{mesurée}}^2 - e^2}$$

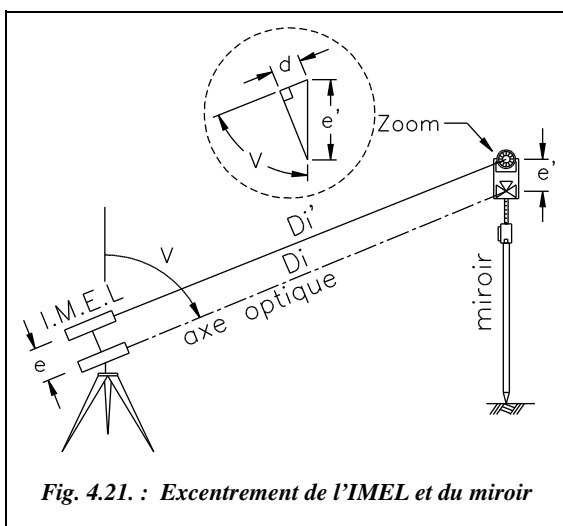
#### Application

Montrez que l'effet de cet excentrement est négligeable (en supposant que  $e$  ne dépasse pas 10 cm) en calculant la distance  $Di$  en dessous de laquelle l'erreur dépasse le millimètre.

#### Réponse

$$\left. \begin{array}{l} Di_{\text{mesurée}} - Di_{\text{exacte}} > 0,001 \\ e = 0,1 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ d'où } Di_{\text{mesurée}} < 5 \text{ m.}$$

Au-delà de cette valeur, l'erreur est inférieure au millimètre. Cet écart étant inférieur à la précision des meilleurs distancemètres, il est pratiquement négligeable.



- Si le miroir est excentré par rapport à la cible de la valeur  $e'$  (fig. 4.21.) : l'erreur commise sur  $Di$  est notée  $d$ , elle est fonction de l'angle zénithal  $V$ . L'incidence de la différence entre  $e$  et  $e'$  étant négligeable, on peut écrire :

$$Di_{\text{exacte}} \approx Di_{\text{mesurée}} - e' \cdot \cos V$$

Posons  $e = e'$ . L'erreur commise est positive si  $V < 100$  gon et négative si  $V > 100$  gon. Elle est indépendante de la distance  $Di$ .



### Application

À partir de quelle valeur de  $V$  une erreur de 2 mm apparaît-elle sur  $Di$  pour un excentrement de  $e' = 5$  cm ?

### Réponse

À partir de  $V = 97,5$  gon. Cette erreur passe à 1 cm pour  $V = 87,2$  gon.

En conclusion, l'excentrement doit être réduit au minimum. Si l'excentrement n'est pas nul, l'erreur qu'il engendre **doit être prise en compte dans les mesures de précision.**

### Remarque

Les appareils modernes intègrent l'IMEL directement dans leur optique, réduisant ainsi l'excentricité à zéro. Les distancemètres vendus séparément fonctionnent avec des miroirs spéciaux dont le centre de visée est décalé vers le bas par rapport au centre du miroir de la même valeur que le centre de l'IMEL est décalé du centre de l'optique. Ceci permet d'aligner l'IMEL directement sur le miroir en visant le centre de la cible dans l'optique du théodolite. Par exemple, soit un distancemètre DI4L monté sur un théodolite T16, sur un T2 ou un T2000 avec un miroir ressemblant à celui schématisé sur la figure 4.21., la croix centrale est décalée vers le bas de la valeur  $e' = e$ .

## 6.2.7 Forme du réflecteur

Si la puissance de l'émetteur est suffisante, une simple paroi réfléchissante (paroi lisse en béton, acier, verre, etc.) peut être suffisante pour effectuer la mesure (en particulier pour les appareils laser grâce à leur puissance d'émission). Pour assurer une importante autonomie aux appareils qui fonctionnent sur batteries portables, l'énergie à l'émission doit être la plus faible possible. On utilise donc un réflecteur spécial qui est un **prisme rhomboédrique**, coin de cube tronqué pour limiter sa fragilité au niveau des coins, ou **prisme trirectangle**.

Ce système est le plus utilisé en raison de sa simplicité de fabrication et de la propriété suivante : tout rayon lumineux subit une réflexion sur trois faces réfléchissantes (formant un trièdre rectangle) et est renvoyé **parallèlement à lui-même** (vue de dessus de la figure 4.22.).

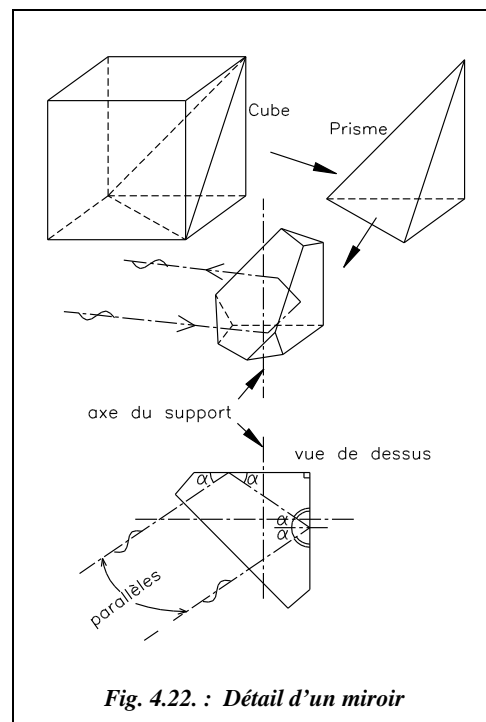


Fig. 4.22. : Détail d'un miroir

On remarque sur la figure 4.22. que le rayon lumineux retour est déplacé par rapport au rayon lumineux aller : son trajet n'est donc pas exactement l'aller-retour jusqu'à l'axe du support du miroir, mais un trajet plus long.

En mesurage de précision (au millimètre près), il faut tenir compte de ce phénomène. L'IMEL est donc **calibré** en tenant compte de cette différence de trajet. La **constante de calibrage** est réglée de manière à **annuler la constante d'addition**  $C$  du réflecteur utilisé. Pour des mesures de précision, on ne peut donc pas jumeler n'importe quel distancemètre avec n'importe quel réflecteur. Si l'on ne peut pas faire autrement, il faut déterminer la constante d'addition (voir l'étalonnage au § 6.3.2) et l'entrer dans le calculateur pour les appareils qui permettent de modifier cette constante.

## 6.3 Précision des IMEL

### 6.3.1 Facteurs influant sur la précision

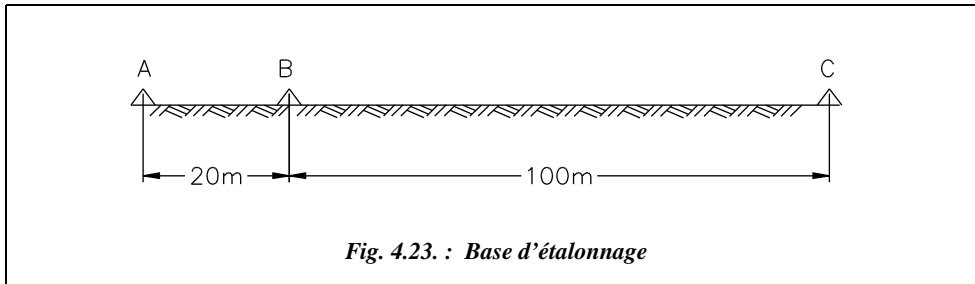
La précision des IMEL est fonction des quatre principaux facteurs suivants :

- la **fréquence de modulation** : elle est ajustée en laboratoire de manière précise, mais elle peut évoluer et nécessite donc des étalonnages réguliers. Sur les appareils les plus précis, distancemètre de type DI 2002, la fréquence est pilotée par un quartz dont le vieillissement donne une erreur inférieure à 1 ppm par année ;
- les **erreurs cycliques** provenant de l'influence réciproque de l'émetteur, du récepteur, du comparateur de phase ;
- la **constante d'addition** qui dépend des caractéristiques optico-mécaniques de l'IMEL et du réflecteur. Elle représente physiquement la différence constante entre la valeur mesurée et la valeur « exacte ». Cette différence est annulée au cours des mesures par l'entrée d'une correction de calibrage dans le calculateur de l'appareil ;
- la connaissance plus ou moins précise de la **correction atmosphérique** à apporter à la mesure. En effet, les conditions de température et de pression peuvent sensiblement varier de l'endroit de l'émission à l'endroit de réflexion.

### 6.3.2 Étalonnage d'un IMEL

C'est l'opération qui consiste à déterminer ou à vérifier la **valeur et le signe de la constante d'addition**  $C$  de l'ensemble composé par l'appareil et le réflecteur. Ceci est effectué en usine par la comparaison de la mesure de l'IMEL à une mesure effectuée par **interférométrie** (précision inférieure au micromètre...). Si l'on ne dispose pas de base d'étalonnage (voir la DRIR ou le service du cadastre), on peut utiliser la méthode suivante, préconisée par les constructeurs (fig. 4.23.).

Fixez trois points stables et alignez les au moyen d'un théodolite de précision. En utilisant le centrage forcé et en se plaçant aux deux extrémités de chaque tronçon mesuré, mesurez plusieurs fois les longueurs (AB), (AC) et (BC). L'appareil donne les mesures « fausses » (AB)', (AC)' et (BC)'.



Si les autres sources d'erreurs peuvent être négligées, on obtient :

$$(AB) = (AB)' + C$$

$$(BC) = (BC)' + C$$

$$(AC) = (AC)' + C$$

Or :  $(AB) + (BC) = (AC)$  donc  $(AB)' + C + (BC)' + C = (AC)' + C$

D'où :

$$C = (AC)' - [(AB)' + (BC)']$$

### 6.3.3 Caractéristiques des appareils actuels

Les IMEL à onde porteuse infrarouge sont les plus courants ; cette technologie a été choisie par la majorité des constructeurs puisque :

- la source émettrice de l'onde (diode à l'arséniure de gallium) est fiable et de longue durée ;
- la technologie du modulateur infrarouge est très répandue et peu onéreuse.
- le rayonnement infrarouge est sans danger pour l'œil de l'opérateur, ce qui n'est pas le cas des appareils laser ;
- l'onde lumineuse est peu sensible aux variations hygrométriques de l'air, ce qui n'est pas le cas des ondes radio ;
- l'énergie consommée est faible, ce qui autorise une miniaturisation et une autonomie suffisantes ;
- le réflecteur est de technologie simple et robuste.

Le tableau ci-après donne les principales caractéristiques de trois appareils de la gamme Wild qui sont indépendants et peuvent se monter sur des théodolites optico-mécaniques classiques. Ils fonctionnent sur la base d'une onde porteuse infrarouge (longueur d'onde  $\lambda = 0,850 \mu\text{m}$ ). Les batteries disponibles assurent une autonomie de 350 à 4 900 mesures.

MODÈLES (WILD)	DI 1001	DI 1600	DI 2002
ÉCART TYPE (DURÉE) MESURE NORMALE : MESURE RAPIDE : MESURE CYCLIQUE : MESURE RÉPÉTITIVE :	5 mm + 5 ppm (1,5s)  10 mm + 5 ppm (0,3 à 1s)	3 mm + 2 ppm (1,5s) 20 mm + 2 ppm (0,2-1s) 3 mm + 2 ppm (1,5s) 10 mm + 2 ppm (0,3 à 1s)	1 mm + 1 ppm (<3s) 3 mm + 1 ppm (1,5s) 1 mm + 1 ppm (2s) 5 mm + 1 ppm (0,3 à 1s)
RÉSOLUTION	1 mm	1 mm	0,1 mm
OUVERTURE FAISCEAU	40 cm à 1 000 m	70 cm à 1 000 m	70 cm à 1 000 m
PORTÉE (EN m) SUR 1 ,3 OU 11 MIROIRS EN FONCTION DES CONDITIONS DE VISIBILITÉ			
COND. DÉFAVORABLES	500, 700, -	1 200, 1 500, 1 800	1 200, 1 500, 1 800
COND. MOYENNES	800, 1 100, -	2 500, 3 500, 5 000	2 500, 3 500, 5 000
COND. EXCELLENTE* <sup>*</sup>	900, 1 300, -	3 500, 5 000, 7 000	3 500, 5 000, 7 000

\*Les conditions météorologiques sont définies dans la documentation du constructeur.

## 7 RÉDUCTION À LA PROJECTION DES DISTANCES MESURÉES

Toutes les distances mesurées par les techniques vues précédemment doivent être transformées avant d'être retranscrites sur une carte en raison des problèmes de représentation plane de l'ellipsoïde (voir chapitre 2).

### 7.1 Détermination de la distance réduite à partir de la distance mesurée sur le terrain

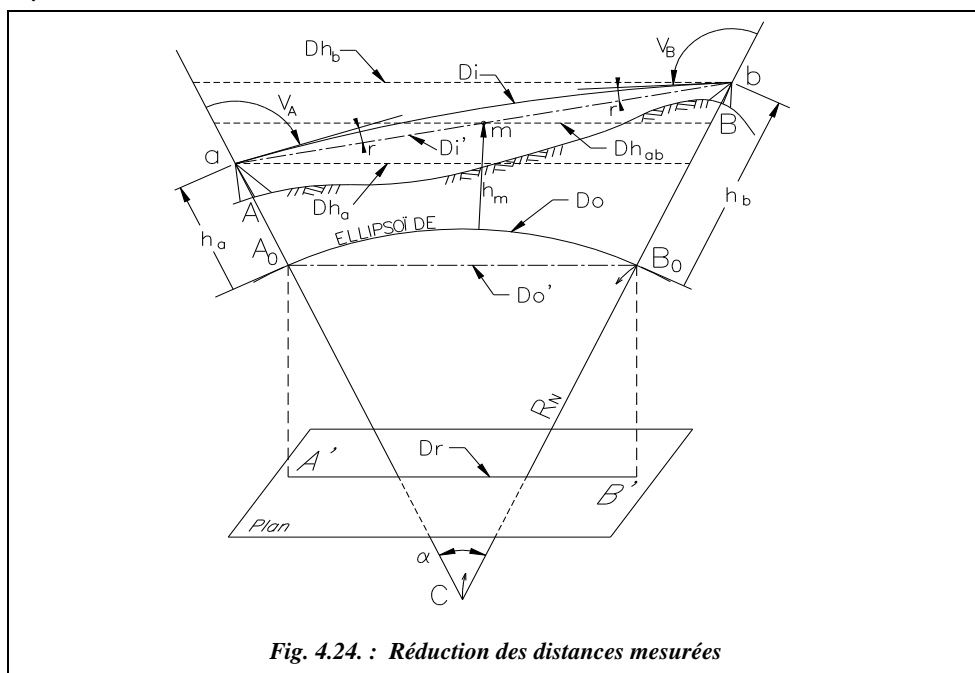
On cherche à obtenir la distance  $A'B'$  notée  $Dr$  (fig. 4.24.) en projection sur un plan horizontal, par exemple une carte.

Sur le terrain, on mesure la distance inclinée  $Di$  au moyen d'un appareil à réflexion d'ondes. Cette distance est mesurée suivant le trajet du rayon lumineux incurvé par la réfraction atmosphérique (angle de réfraction  $r$ ).  $Di$  est mesurée entre les points (a) et (b), centres optiques des appareils posés en A et B : par exemple (a) représente l'axe des tourillons en A et (b) le centre du miroir en B.

On peut mesurer  $Di$  en station en A et en visant B ou bien en station en B et en visant A ou encore par visées réciproques (simultanées ou non) entre A et B. On mesure également les angles verticaux  $V_A$  et  $V_B$ . On doit connaître les hauteurs  $h_a$  et  $h_b$  des points a et b au-dessus de l'ellipsoïde.

**Remarque**

Les points (a) et (b) ont la même projection sur l'ellipsoïde que les points A et B stationnés. Ils sont confondus pour le calcul des distances. Pour le calcul des dénivelées, on s'attache à la dénivelée instrumentale entre a et b (voir chap. 6 § 1) puis on y rajoute la différence de hauteur de station entre A et B. Les notations sont les suivantes :



$R_N = \frac{R_A + R_B}{2}$  est la moyenne des rayons des sections normales à l'ellipsoïde en A et B.

L'altitude du point m situé au milieu du segment (ab) est :  $h_m = \frac{h_a + h_b}{2}$ .

On note  $h_a^t$  et  $h_b^t$  la hauteur des tourillons ou du voyant en A ou en B tel que  $h_a = h_A + h_a^t$  et  $h_b = h_B + h_b^t$ . On définit de même un point M milieu de AB tel que :

$$h_M = \frac{h_A + h_B}{2}.$$

$Do$  est la distance en mètre **réduite à l'ellipsoïde**.

$Dr$  est la distance en mètre **réduite à la projection** (projection conique conforme Lambert en France ; chap. 2 § 3.4).

$Dh_A$  est la distance horizontale en mètre **réduite à l'horizon du point A**.

$Dh = Dh_{AB}$  est la distance en mètre **réduite à l'horizon du point M** d'altitude moyenne entre A et B.

En raison de la sphéricité terrestre, les distances horizontales sur le terrain sont fonction de l'altitude du point de réduction. En toute rigueur, la distance horizontale réduite à l'horizon du point A est différente de celle réduite à l'horizon du point (a). On confondra ces deux valeurs dans les calculs car elles sont très proches.

En effet, l'incidence de cette approximation sur le résultat est très faible. On peut écrire :

$$\sin(\alpha/2) = \frac{Dh_A}{R_N + h_A} = \frac{Dh_a}{R_N + h_A + h_a^t} = \frac{Dh_a - Dh_A}{h_a^t} \text{ d'où } \frac{Dh_a - Dh_A}{Dh_A} = \frac{h_a^t}{R_N + h_A}.$$

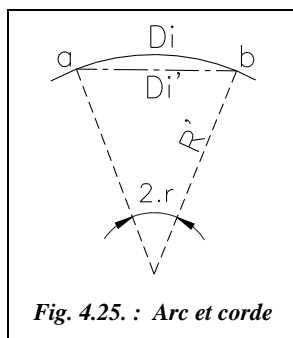
Numériquement, dans un cas très défavorable où  $h_A = 0$  et  $h_A^t = 2$  m, cela donne une erreur de l'ordre de 0,3 ppm. Donc, pour la suite, on admettra que  $Dh_A = Dh_a$ ,  $Dh_B = Dh_b$  et  $Dh_M = Dh_m$ .

Nous allons établir dans les paragraphes suivants la chronologie des calculs de réduction.

### 7.1.1 Mesure de $Di$

Le trajet de la ligne de visée est incurvé par la réfraction atmosphérique ; cette courbe est assimilée à un arc de cercle de rayon  $R' \approx 6 R_N$  (voir chapitre 6).

### 7.1.2 Réduction à la corde pour obtenir $Di'$



En topographie, étant donné la valeur du rayon de la terre par rapport aux mesures effectuées, cette réduction est négligée. Cela est d'autant plus vrai que le rayon de courbure des rayons lumineux est environ six fois plus grand.

La corde (ab) est notée  $Di'$  et l'arc est noté  $Di$  (fig. 4.25.).

$$Di = 2 R' r_{\text{radian}} \text{ et } Di' = 2 R' \cdot \sin r \text{ donc}$$

$$Di' = 2 R' \cdot \sin \frac{Di}{2 R'}.$$

En utilisant un développement limité de la fonction sinus puisque la distance  $Di$  est très inférieure à  $2 R'$ , on obtient :

$$Di' \approx Di - \frac{Di^3}{24 R'^2}, \text{ ce qui donne une erreur de 1 mm à partir}$$

de 32,7 km de portée, avec  $R_N = 6\,380$  km. On assimilera donc pratiquement toujours l'arc à la corde.

### 7.1.3 Réduction à l'horizontale $Dh$

La visée unilatérale depuis A, les visées réciproques depuis A et B et les visées réciproques simultanées permettent d'écrire :

$$Dh_A = Di \cdot \sin V_A + \frac{(mra - 2)}{2 R_N} Di^2 \cdot \sin V_A \cdot \cos V_A$$

$$\left. \begin{array}{l} Dh_A = Di \cdot \sin V_A \\ Dh_B = Di \cdot \sin V_B \end{array} \right\} Dh_{AB} = \frac{Dh_A + Dh_B}{2}$$

$$Dh_{AB} = Di \cdot \cos\left(\frac{V_B - V_A}{2}\right) \quad (\text{chap. 6, § 6})$$

Ces trois formules permettent de corriger la valeur de  $Dh$  des erreurs dues à la réfraction atmosphériques et à la sphéricité terrestre. Dans les deux dernières formules, les termes de réfraction et de sphéricité s'éliminent par différence ; dans la première, ils sont évalués par un terme correctif faisant intervenir le **module de réfraction atmosphérique  $mra$  et le rayon terrestre  $R_N$** , (voir chap. 6 § 5.1 et 5.2). Dans la nouvelle gamme des appareils Leica (tachéomètre TPS 1000), le module  $mra$  peut être entré par l'utilisateur. Dans les appareils précédents, il était pris égal à 0,13.

Dans la deuxième formule, les valeurs de  $Dh_A$  et  $Dh_B$  sont théoriquement fausses puisqu'elles ne prennent pas en compte la sphéricité et la réfraction, mais leur moyenne donne bien la distance réduite au point milieu  $M$ .

#### Application

Avec quelle précision faut-il lire les angles verticaux pour obtenir  $Dh_{AB}$  au centimètre près si une distance  $Di$  de 2 km est mesurée avec un IMEL dont les caractéristiques sont  $\sigma_{Di} = \pm (3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$  ? On procède par visées réciproques simultanées.

$$V_B - V_A = 6 \text{ gon.}$$

#### Réponse

$$\sigma_{Dh}^2 = [\sigma_{Di} \cdot \cos(V_B - V_A)/2]^2 + 2 [Di \cdot \sigma_V \cdot \sin(V_B - V_A)/2]^2, \text{ soit } \sigma_V = \pm 5,8 \text{ mgon.}$$

### 7.1.4 Réduction à l'ellipsoïde

Le théorème de Thalès (fig. 4.24.) permet d'écrire :

$$Do' = Dh_{ab} \frac{R_N}{R_N + hm} = Dh_a \frac{R_N}{R_N + h_a} = Dh_b \frac{R_N}{R_N + h_b}$$

Il faut donc connaître l'altitude moyenne de la visée ( $ab$ ), c'est-à-dire celle du point  $m$ , ou celle de  $a$  ou  $b$ . Étant donné la valeur du rayon moyen terrestre par rapport aux altitudes courantes, il suffit de connaître  $hm$ ,  $h_a$  ou  $h_b$  au mètre près (nous avons vu que l'erreur commise est inférieure à 1 ppm). On évalue  $hm$  comme suit :

Les visées unilatérales ou réciproques permettent d'écrire :

$$hm = h_A + h_a^t + \frac{Di}{2} \cos V_A + Cna = h_B + h_b^t + \frac{Di}{2} \cos V_B + Cna$$

Les visées réciproques simultanées permettent d'écrire :

$$hm = h_A + h_a^t + \frac{Di}{2} \sin\left(\frac{V_B - V_A}{2}\right) = h_B + h_b^t + \frac{Di}{2} \sin\left(\frac{V_A - V_B}{2}\right)$$

$Cna$  est la **correction de niveau apparent** en mètre et est définie au chapitre 6 § 5.3 :

$$Cna_m \approx \frac{Dh_{km}^2}{15,2}$$

**Attention !** il faut prendre  $Dh/2$  pour le calcul de  $Cna$  puisque  $m$  est au milieu de  $ab$ .

#### Application

Avec quelle précision faut-il connaître  $hm$  pour obtenir  $Do'$  au millimètre près, en admettant qu'il n'y ait pas d'incertitude sur  $Di$  et sur  $R_N$ ? Prenez les valeurs numériques de l'exemple précédent.

#### Réponse

$Di = 2$  km,  $V_B - V_A = 6$  gon, donc  $Dh_{AB} \approx 1\,997,8$  m et  $\Delta h_{AB} \approx 94,2$  m.

$$\sigma_{Do'} = \frac{DhR_N}{(R_N + hm)^2} \sigma_h \quad \text{donc} \quad \sigma_h \approx \frac{R_N}{Dh} \sigma_{Do'}$$

On obtient  $\sigma_h = \pm 3,2$  m ou encore  $\pm 16$  m pour connaître  $Do'$  à  $\pm 5$  mm près.

Pour  $Di = 5$  km, on trouve  $\sigma_h = \pm 6,5$  m pour obtenir la distance à  $\pm 5$  mm près, ce qui est homogène à la précision des meilleurs appareils de mesure actuels. Par exemple,  $\pm 6$  mm sur 5 km pour le distancemètre DI 2002. Donc, pour des visées ordinaires, l'altitude moyenne  $hm$  pourra être simplement évaluée au mètre près.

**Attention !** les calculs précédents sont effectués à partir des hauteurs  $h$  au-dessus de l'ellipsoïde. On connaît plus généralement l'altitude d'un point c'est-à-dire sa hauteur au dessus du géoïde (voir chap. 2 § 6.1) ; et ce dernier présente des irrégularités par rapport à l'ellipsoïde (voir au chapitre 2 la figure 2.49-a. présentant la carte donnant les **ondulations du géoïde** par rapport à l'ellipsoïde. Cette carte fait apparaître des différences variant de + 14 m dans les Alpes à - 1 m en Gironde). On constate donc que ces ondulations introduisent des erreurs qui, dans certains cas, peuvent être plus grandes que la limite de 1 à 6 m que nous avons déterminée dans l'exercice précédent.

Il faudra donc, en toute rigueur, corriger l'altitude des points (donnée par rapport au géoïde), l'interpolation à vue sur la carte étant suffisante puisque les courbes sont données tous les mètres et que la précision du mètre suffit.

#### Exemple

L'altitude moyenne de visée est calculée à partir des altitudes NGF :  $Hm = 130,142$  m. La mesure se situe à Antibes où le géoïde est à environ 8 m au dessus de l'ellipsoïde. L'altitude à prendre en compte dans le calcul est donc  $hm \approx 138$  m.



### Application

Avec quelle précision faut-il connaître le rayon terrestre pour obtenir une précision homogène à celle des appareils de mesure ? Faites ces calculs pour des portées de 2 km et 5 km à une altitude moyenne de 1 500 m.

### Réponse

$$Do' = \frac{Dh}{1 + \frac{hm}{R_N}} \approx Dh \left( 1 - \frac{hm}{R_N} \right) \quad \text{donc : } \sigma_{Do'} = \frac{Dh \cdot hm}{R_N^2} \sigma_R.$$

En prenant une altitude moyenne de 1 500 m, on obtient :

- pour une portée de 2 km : une incertitude de  $\pm 2$  mm sur  $Do'$  autorise une incertitude de  $\pm 27$  km sur  $R$  ;
- pour une portée de 5 km : une incertitude de  $\pm 6$  mm sur  $Do'$  autorise une incertitude de  $\pm 33$  km sur  $R$ .

On peut donc se contenter de prendre une valeur moyenne du rayon terrestre (rayon moyen de l'ellipsoïde de Clarke :  $Ro = (a + b)/2 \approx 6\,367$  km pour des altitudes courantes. On peut aussi utiliser le rayon de courbure de la sphère voisine de l'ellipsoïde  $R_N$  qui vaut en moyenne 6 380 km en France (voir chap. 2 § 2.4).

### Remarque

Pour une précision optimale, on peut utiliser la formule :

$$Do' = \sqrt{\frac{Di - (h_b - h_a)^2}{\left[1 + \frac{h_a}{R_N}\right] \left[1 + \frac{h_b}{R_N}\right]}}$$

Cette formule donne directement le passage de  $Di$  à  $Do'$ .

Démontrons cette formule.

Dans les deux triangles CAoBo et Cab (fig. 4.26.), en considérant un rayon moyen constant  $R_N$  entre Ao et Bo, on peut écrire :

$$Do'^2 = R_N^2 + R_N^2 - 2R_N^2 \cos(2\alpha)$$

$$Di^2 = (R_N + h_a)^2 + (R_N + h_b)^2 - 2(R_N + h_a)(R_N + h_b) \cos(2\alpha)$$

En éliminant le terme en  $\cos(2\alpha)$  dans ces deux équations on arrive à :

$$\frac{2R_N^2 - Do'^2}{2R_N^2} = \frac{(R_N + h_a)^2 + (R_N + h_b)^2 - Di^2}{2(R_N + h_a)(R_N + h_b)} ;$$

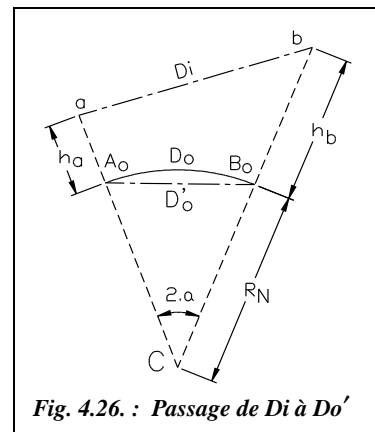


Fig. 4.26. : Passage de  $Di$  à  $Do'$

$$\text{soit } \frac{Do'^2}{2R_N^2} = \frac{2(R_N + h_a)(R_N + h_b) - (R_N + h_a)^2 - (R_N + h_b)^2 + Di^2}{2(R_N + h_a)(R_N + h_b)} ;$$

$$\text{puis } \frac{Do'^2}{2R_N^2} = \frac{Di^2 - [(R_N + h_a) - (R_N + h_b)]^2}{2(R_N + h_a)(R_N + h_b)} = \frac{Di^2 - (h_a - h_b)^2}{2(R_N + h_a)(R_N + h_b)} ;$$

$$\text{donc : } Do'^2 = \frac{Di^2 - (h_a - h_b)^2}{\left(1 + \frac{h_a}{R_N}\right)\left(1 + \frac{h_b}{R_N}\right)} .$$

### 7.1.5 Correction pour passer de $Do'$ à $Do$

Comme au paragraphe 7.1.2., on assimile l'arc à la corde, donc :  $Do = Do'$

### 7.1.6 Correction de réduction à la projection pour obtenir $Dr$

C'est une quantité algébrique que l'on ajoute à  $Do$  pour obtenir la distance définitive  $Dr$ . Elle dépend du système de projection utilisé (projection conique conforme Lambert en France).

$$Dr = Do(1 + kr) \quad kr \text{ est le } \mathbf{\text{coefficient d'altération linéaire}} \text{ (chap. 2 § 3.4.2.2.)}$$

On note aussi :  $Dr = Do + Cr$  avec  $Cr = kr \cdot Do$   $Cr$  est la **correction d'altération linéaire**.

Pour une même zone Lambert et sur le méridien origine, la valeur de  $kr$  varie d'environ +36 cm/km en limite nord de la zone à +37 cm/km en limite sud, en passant par -12 cm/km sur le parallèle origine. Il existe plusieurs manières d'obtenir la valeur de  $kr$  :

**1 -** Utiliser un tableau comme celui de la page 180 qui donne le coefficient d'altération linéaire  $kr$  en **cm/km pour la zone II**.  $kr$  y est obtenu par interpolation linéaire à partir des coordonnées du point milieu de chaque visée ( $E$  au kilomètre près et  $N$  à 100 mètre près).



**2 -** Utiliser un graphique comme celui de la figure 4.27. qui permet de faire une interpolation à vue (plus rapide mais moins précise). Ce graphique (établi sur Excel dans le tableau ALTERAT.XLS du cédérom) donne la valeur de  $kr$  en cm/km en fonction de l'ordonnée  $Y$  (ou Nord en km). Il faut interpoler à vue en fonction de la valeur de  $X$  (ou Est) : chaque courbe correspond à deux valeurs de  $X$  (en km) du fait de la symétrie des valeurs par rapport au méridien de Paris. Il n'y a donc que sept courbes. Ce graphique est établi pour la zone II. Pour obtenir un graphique sur d'autres zones, utilisez le tableau ALTERAT.XLS. D'autres courbes donnant  $kr$  en fonction de  $X$  (en km) y sont disponibles.

**3** - Effectuer un calcul de transformation de coordonnées Lambert en coordonnées géographiques et en déduire  $kr$  (voir chap. 2 § 3.4.2 et 3.4.6) soit manuellement, soit avec le tableau COORDON.XLS. Le calcul manuel est très fastidieux et constitue un exercice de calcul complet : il fait appel à une résolution par approximations successives.

**4** - Utiliser les graphiques fournis avec les répertoires de points de l'IGN sur lesquels on peut calculer par interpolation graphique la valeur de  $kr$  (voir chap. 2 § 3.4.2.2).

**5** - Utiliser la fonction  $kr(X,Y)$  du tableau MENUPOPO.XLS.

**Attention !**  $kr$  est donné en **cm/km** ; pour l'utiliser dans la formule  $Dr = Do (1 + kr)$ , il faut le convertir en m/m donc le diviser par  $10^5$ . Le signe de  $kr$  doit être conservé dans la formule de réduction.

#### Application

Le point central d'un chantier en zone Lambert II est de coordonnées (982 165,36 m ; 2 152 145,68 m). L'étendue du chantier autour de ce point est de 5 km de part et d'autre en Est et 10 km de part et d'autre au Nord. Quelle est la valeur moyenne de  $kr$  sur ce chantier ?

#### Réponse

À partir du tableau,  $N = 152,1$  km donne  $kr = -8,5$  cm/km pour  $E = 900$  km et  $kr = -7,7$  cm/km pour  $E = 1\ 000$  km. Pour  $E = 982$  km, on obtient par interpolation  $kr = -7,8$  cm/km.

À partir de l'abaque (fig. 4.27.), on obtient  $-8$  cm/km. Une erreur de 0,5 cm/km sur  $kr$  donnerait un écart de 1 cm sur  $Dr$  pour une distance  $Do$  de 2 km.

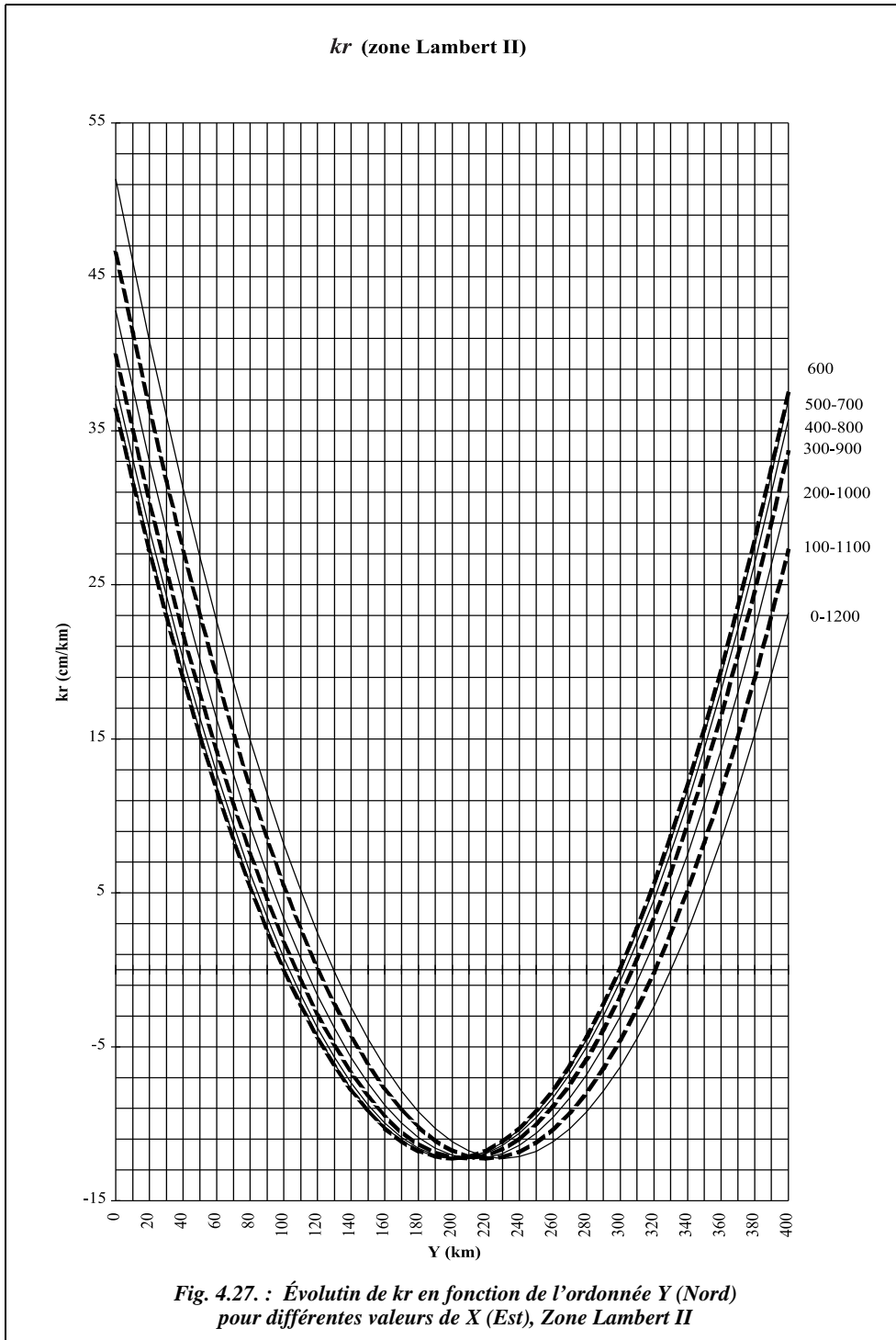
#### Remarque

On peut faire apparaître dans ces calculs de réduction des formulations différentes en fonction de la portée des visées, reprenant par exemple les limites de 500 m et 1 500 m comme en nivellement indirect (chapitre 6). Ce découpage est justifié par l'influence d'erreurs systématiques que l'on ne peut plus négliger au-delà de certaines portées. Nous n'avons pas repris ce découpage, considérant que les moyens informatiques actuels permettent de ne plus se poser ce genre de problème : les formules utilisées donneront toujours la précision maximale.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Pour plus de précision, voir par exemple l'article *Réduction des longueurs* paru dans la revue XYZ, n° 30, de 1987, dans lequel est étudiée l'influence de toutes les approximations en fonction de la portée de la visée. Cet article a été complété par *À propos de la réduction des distances à l'ellipsoïde*, n° 46 de la même revue.

**Tableau donnant *kr* en cm/km pour la zone II**

<b>E (km)</b>	<b>0</b>	<b>100</b>	<b>200</b>	<b>300</b>	<b>400</b>	<b>500</b>	<b>600</b>	<b>700</b>	<b>800</b>	<b>900</b>	<b>1000</b>	<b>1100</b>	<b>1200</b>	<b>E (km)</b>
<b>N (km)</b>														<b>N (km)</b>
<b>0</b>	51,4	46,6	42,8	39,9	37,9	36,8	36,4	36,8	37,9	39,9	42,8	46,6	51,4	<b>0</b>
<b>10</b>	46,0	41,4	37,8	35,1	33,1	32,0	31,6	32,0	33,1	35,1	37,8	41,4	46,0	<b>10</b>
<b>20</b>	40,8	36,5	33,0	30,4	28,6	27,5	27,2	27,5	28,6	30,4	33,0	36,5	40,8	<b>20</b>
<b>30</b>	35,9	31,8	28,5	26,0	24,3	23,3	22,9	23,3	24,3	26,0	28,5	31,8	35,9	<b>30</b>
<b>40</b>	31,3	27,3	24,2	21,8	20,2	19,2	18,9	19,2	20,2	21,8	24,2	27,3	31,3	<b>40</b>
<b>50</b>	26,8	23,0	20,1	17,9	16,4	15,5	15,2	15,5	16,4	17,9	20,1	23,0	26,8	<b>50</b>
<b>60</b>	22,6	19,1	16,3	14,2	12,8	11,9	11,6	11,9	12,8	14,2	16,3	19,1	22,6	<b>60</b>
<b>70</b>	18,7	15,3	12,7	10,7	9,4	8,6	8,4	8,6	9,4	10,7	12,7	15,3	18,7	<b>70</b>
<b>80</b>	14,9	11,8	9,3	7,5	6,3	5,6	5,3	5,6	6,3	7,5	9,3	11,8	14,9	<b>80</b>
<b>90</b>	11,4	8,5	6,2	4,6	3,4	2,7	2,5	2,7	3,4	4,6	6,2	8,5	11,4	<b>90</b>
<b>100</b>	8,2	5,5	3,4	1,8	0,8	0,2	0,0	0,2	0,8	1,8	3,4	5,5	8,2	<b>100</b>
<b>110</b>	5,2	2,7	0,7	-0,7	-1,6	-2,2	-2,4	-2,2	-1,6	-0,7	0,7	2,7	5,2	<b>110</b>
<b>120</b>	2,4	0,1	-1,7	-2,9	-3,8	-4,3	-4,4	-4,3	-3,8	-2,9	-1,7	0,1	2,4	<b>120</b>
<b>130</b>	-0,1	-2,2	-3,8	-4,9	-5,7	-6,1	-6,3	-6,1	-5,7	-4,9	-3,8	-2,2	-0,1	<b>130</b>
<b>140</b>	-2,4	-4,3	-5,7	-6,7	-7,4	-7,7	-7,9	-7,7	-7,4	-6,7	-5,7	-4,3	-2,4	<b>140</b>
<b>150</b>	-4,5	-6,2	-7,4	-8,2	-8,8	-9,1	-9,2	-9,1	-8,8	-8,2	-7,4	-6,2	-4,5	<b>150</b>
<b>160</b>	-6,3	-7,8	-8,8	-9,5	-10,0	-10,2	-10,3	-10,2	-10,0	-9,5	-8,8	-7,8	-6,3	<b>160</b>
<b>170</b>	-7,9	-9,1	-10,0	-10,5	-10,9	-11,1	-11,2	-11,1	-10,9	-10,5	-10,0	-9,1	-7,9	<b>170</b>
<b>180</b>	-9,2	-10,2	-10,9	-11,3	-11,6	-11,7	-11,8	-11,7	-11,6	-11,3	-10,9	-10,2	-9,2	<b>180</b>
<b>190</b>	-10,3	-11,1	-11,6	-11,9	-12,0	-12,1	-12,1	-12,1	-12,0	-11,9	-11,6	-11,1	-10,3	<b>190</b>
<b>200</b>	-11,2	-11,7	-12,0	-12,2	-12,2	-12,3	-12,3	-12,3	-12,2	-12,2	-12,0	-11,7	-11,2	<b>200</b>
<b>210</b>	-11,8	-12,1	-12,2	-12,3	-12,2	-12,2	-12,1	-12,2	-12,2	-12,3	-12,2	-12,1	-11,8	<b>210</b>
<b>220</b>	-12,1	-12,3	-12,2	-12,1	-11,9	-11,8	-11,8	-11,8	-11,9	-12,1	-12,2	-12,3	-12,1	<b>220</b>
<b>230</b>	-12,3	-12,2	-11,9	-11,6	-11,4	-11,2	-11,2	-11,2	-11,4	-11,6	-11,9	-12,2	-12,3	<b>230</b>
<b>240</b>	-12,1	-11,8	-11,4	-11,0	-10,6	-10,4	-10,3	-10,4	-10,6	-11,0	-11,4	-11,8	-12,1	<b>240</b>
<b>250</b>	-11,8	-11,2	-10,6	-10,0	-9,6	-9,3	-9,2	-9,3	-9,6	-10,0	-10,6	-11,2	-11,8	<b>250</b>
<b>260</b>	-11,2	-10,4	-9,6	-8,9	-8,3	-7,9	-7,8	-7,9	-8,3	-8,9	-9,6	-10,4	-11,2	<b>260</b>
<b>270</b>	-10,3	-9,3	-8,3	-7,5	-6,8	-6,4	-6,2	-6,4	-6,8	-7,5	-8,3	-9,3	-10,3	<b>270</b>
<b>280</b>	-9,2	-8,0	-6,8	-5,8	-5,0	-4,5	-4,4	-4,5	-5,0	-5,8	-6,8	-8,0	-9,2	<b>280</b>
<b>290</b>	-7,9	-6,4	-5,0	-3,9	-3,0	-2,4	-2,3	-2,4	-3,0	-3,9	-5,0	-6,4	-7,9	<b>290</b>
<b>300</b>	-6,3	-4,6	-3,0	-1,7	-0,7	-0,1	0,1	-0,1	-0,7	-1,7	-3,0	-4,6	-6,3	<b>300</b>
<b>310</b>	-4,5	-2,5	-0,8	0,7	1,8	2,5	2,7	2,5	1,8	0,7	-0,8	-2,5	-4,5	<b>310</b>
<b>320</b>	-2,4	-0,2	1,7	3,3	4,6	5,3	5,6	5,3	4,6	3,3	1,7	-0,2	-2,4	<b>320</b>
<b>330</b>	0,0	2,4	4,5	6,3	7,6	8,4	8,7	8,4	7,6	6,3	4,5	2,4	0,0	<b>330</b>
<b>340</b>	2,5	5,2	7,5	9,4	10,8	11,7	12,0	11,7	10,8	9,4	7,5	5,2	2,5	<b>340</b>
<b>350</b>	5,3	8,2	10,8	12,8	14,4	15,3	15,6	15,3	14,4	12,8	10,8	8,2	5,3	<b>350</b>
<b>360</b>	8,4	11,5	14,3	16,5	18,1	19,1	19,5	19,1	18,1	16,5	14,3	11,5	8,4	<b>360</b>
<b>370</b>	11,7	15,1	18,0	20,4	22,2	23,2	23,6	23,2	22,2	20,4	18,0	15,1	11,7	<b>370</b>
<b>380</b>	15,3	18,9	22,0	24,6	26,4	27,6	28,0	27,6	26,4	24,6	22,0	18,9	15,3	<b>380</b>
<b>390</b>	19,1	23,0	26,3	29,0	31,0	32,2	32,6	32,2	31,0	29,0	26,3	23,0	19,1	<b>390</b>
<b>400</b>	23,2	27,3	30,8	33,6	35,7	37,0	37,4	37,0	35,7	33,6	30,8	27,3	23,2	<b>400</b>



## 7.2 Distance déduite des coordonnées

C'est l'opération inverse de celle décrite au paragraphe 7.1. Ci-dessous est donné le détail des calculs.

1 -  $Dr$  est déduite des coordonnées Lambert des points A et B par la formule :

$$Dr = \sqrt{(E_A - E_B)^2 + (N_A - N_B)^2}$$

2 - On obtient  $Do$  en utilisant l'opposé de la correction d'altération linéaire, c'est-à-dire :

$$Do \approx Dr - Cr = \frac{Dr}{1 + kr} \approx Dr(1 - kr)$$

3 - On remonte à l'altitude moyenne de la visée (ou du chantier), soit :

$$Dh_{AB} = Do \left( 1 + \frac{h_m}{R_N} \right)$$

## 7.3 Exemples de calcul

### Application

Calculez les coordonnées Lambert d'un point B visé par rayonnement depuis un point A connu. Les données sont :

A (952 165,36 m ; 2 002 145,68 m), zone II.  $h_A = 831,221$  m (au-dessus de l'ellipsoïde).  
 $Di = 542,124$  m ;  $V = 90,877$  gon ;  $h^t = 1,72$  m ;  $h^v = 1,9$  m ;  $mra \approx 0,16$  ;  $R_N = 6380$  km.  $G_{AB} = 2,8858$  gon (correction de  $dv$  effectuée).

### Réponse

$$Dh = Di \sin V + (mra - 2) \sin V \cdot \cos V \cdot Di^2 / 2 / R_N ; \quad Dh = 536,561 \text{ m.}$$

$$h_B = h_A + h_A^t - h_B^v + Dh \cot V + Cna ; \quad h_B = 908,481 \text{ m.}$$

$$\text{Hauteur de l'appareil en A : } h_a = 832,941 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur du voyant en B : } h_b = 910,381 \text{ m.}$$

$$Do : \text{ formule complète avec } h_a, h_b \text{ et } Di ; \quad Do = 536,491 \text{ m.}$$

$$Dr = Do (1 + kr), \quad kr \text{ est déterminé à partir des coordonnées du milieu de la visée :}$$

$$Em \approx E_A + Dh / 2 \sin G_{AB} \quad Em = 952 \text{ km.}$$

$$Nm \approx N_A + Dh / 2 \cos G_{AB} \quad Nm = 2,4 \text{ km.}$$

$$kr = 40,1 \cdot 10^{-5} \quad \mathbf{Dr = 536,706 \text{ m}}$$

Si on refait le calcul plus rapidement, en négligeant toute correction de niveau apparent et en prenant les formules les plus simples, on obtient :

$$Dh = Di \sin V = 536,567 \text{ m.}$$

$$\text{Altitude moyenne de la visée : } hm = h_A + h_A^t + Di \cdot \cos V / 2 \approx 872 \text{ m.}$$

$$Do = Dh \cdot R_N / (hm + R_N) = 536,494 \text{ m.}$$

$Dr = 536,708 \text{ m}$  en prenant  $kr = 40 \cdot 10^{-5}$  pour le point A soit un écart de 2 mm avec le calcul précédent. Notez que les valeurs choisies donnent des conditions défavorables.

Les coordonnées de B sont alors :  $E_B = E_A + Dr \cdot \sin G_{AB} = 952\,189,68 \text{ m}$

Vérification :  $D_{AB} = 536,70 \text{ m}$   $N_B = N_A + Dr \cdot \cos G_{AB} = 2\,002\,681,83 \text{ m}$

### Application

Refaites les calculs précédents (uniquement jusqu'à  $Dr$ ) pour une distance inclinée mesurée de 3042,120 m.

### Réponse

1- Le calcul rapide permet d'obtenir :  $Dh = 3\,010,938 \text{ m}$  ;  $hm = 1050 \text{ m}$  ;  
 $Do = 3\,010,442 \text{ m}$  ;  $Dr = 3\,011,646 \text{ m}$  avec  $kr = 40 \text{ cm/km}$ .

2- Le calcul exact permet d'obtenir :  $Dr = 3\,011,545 \text{ m}$  avec  $kr = 39,5 \text{ cm/km}$ , soit un écart total de l'ordre de 10 cm.

3- Pour d'autres valeurs de la distance inclinée  $Di$ , on obtient dans les mêmes conditions :

pour  $Di = 5\,000 \text{ m}$ , on trouve  $Dr = 4\,949,523$  et un écart entre les deux calculs de 23 cm ;

- pour  $Di = 2\,000 \text{ m}$ , on trouve  $Dr = 1\,979,946$  et un écart de 4 cm ;
- pour  $Di = 1\,000 \text{ m}$ , on trouve  $Dr = 989,996$  et un écart de 9 mm.

4- Si on choisit A vers le centre de la zone Lambert ( $E_A = 600 \text{ km}$  et  $N_A = 200 \text{ km}$ ), on trouve :

- pour  $Di = 5\,000 \text{ m}$ ,  $Dr = 4\,946,987 \text{ m}$  (écart de 25 cm avec les calculs simplifiés) ;
- pour  $Di = 3\,000 \text{ m}$ ,  $Dr = 2\,968,314 \text{ m}$  (écart de 9 cm avec les calculs simplifiés) ;
- pour  $Di = 2\,000 \text{ m}$ ,  $Dr = 1\,978,917 \text{ m}$  (écart de 4 cm avec les calculs simplifiés) ;
- pour  $Di = 1\,000 \text{ m}$ ,  $Dr = 989,479 \text{ m}$  (écart de 1 cm avec les calculs simplifiés).

Ces calculs montrent donc que pour des portées inférieures à 1 km et pour des visées ordinaires ( $V > 90 \text{ gon}$ ), le calcul simplifié est largement suffisant.



Grâce à l'informatique, la question des approximations ne se pose plus : le tableau DISTANCE.XLS fournit sur le cédérom de l'ouvrage permet de faire tous ces calculs avec un minimum d'approximations.

### Application

Calculez la distance horizontale à implanter sur le terrain pour obtenir B depuis A. B et A sont connus en coordonnées Lambert zone III : A (982 165,36 m ; 3 152 145,68 m) et B (982 362,66 m ; 3 152 045,78 m). L'altitude moyenne est de 130 m.

**Réponse**

$Dr = 221,150 \text{ m}$  ;  $kr = -8,0 \text{ cm/km}$  ;  $Do = 221,167 \text{ m}$  ;  $Dh = 221,172 \text{ m}$ .

## 7.4 Correction globale pour un chantier

Pour l'ensemble d'un chantier d'étendue réduite (pas pour un projet routier), on peut déterminer une correction globale à appliquer à toutes les mesures. Cette correction permettra de passer de la distance horizontale  $Dh$  à la distance réduite  $Dr$ . Le but final est de calculer cette correction sous forme de ppm et d'introduire sa valeur dans le calculateur de la station totale utilisée qui donnera alors directement les distances réduites  $Dr$ .

L'appareil est en station au point S, la hauteur de l'axe des tourillons au-dessus de l'ellipsoïde est  $hs$ . Donc, on peut écrire la relation suivante :

$$Dr = Do(1 + kr) = Dh_S \frac{R_N}{R_N + hs} (1 + kr) = Dh_S \left[ 1 + \frac{R_N kr - hs}{R_N + hs} \right].$$

On obtient une expression de la forme :  $Dr = Dhs(1 + C)$  avec  $C = \frac{R_N kr - hs}{R_N + hs}$

Il suffit de calculer le coefficient  $C$  et d'introduire sa valeur dans le calculateur de l'appareil sous forme de **ppm** (ou mm/km) pour obtenir directement les distances réduites à la projection, et donc les coordonnées Lambert des points visés. Attention aux unités ! si  $hs$  et  $R_N$  sont donnés en m,  $kr$  est sans dimension et ne doit pas être en cm/km ou mm/km dans la formule de  $C$ . Les termes  $kr$  et  $hs$  sont déterminés à partir d'un point central du chantier.  $C$  est donc bien une constante du chantier. Par exemple, sur les valeurs de la 3<sup>ème</sup> application du paragraphe 7.3., on a :  $C = -100 \text{ ppm (mm/km)}$ .

$Dh = 221,172 \text{ m}$  donne  $Dh(1 + C \cdot 10^{-6}) = Dr = 221,149 \text{ m}$  affiché directement par la station totale. Étant donnée la faible portée, on assimile  $hs$  et  $hm$ ,  $Dh_S$  et  $Dh_{AB}$ .

### Remarque

La station totale effectue directement les corrections de niveau apparent (voir chap. 6 § 5.3). Les seules sources d'erreur qui subsistent sont :

1- la forte **variation en altitude**, ce qui est assez rare. Une erreur de 5 m sur l'altitude moyenne, soit 10 m entre station et miroir, donne environ 1 mm sur 1 km (1 ppm) ;

2- la **variation de  $kr$**  le long de la visée : si le chantier est situé près du centre de la zone Lambert,  $kr$  varie peu. Il serait par exemple possible de traiter un chantier d'une largeur de 400 km en Est par 40 km au Nord sur lequel  $kr \approx -12 \text{ cm/km}$ . Alors que si le chantier est situé aux extrémités nord ou sud de la zone Lambert,  $kr$  varie plus rapidement. Au pire, à l'extrême sud-ouest ou sud-est d'une zone,  $kr$  reste constant sur un chantier de 15 km en Est par 2 km au Nord.



## 8 MESURE ASSISTÉE PAR SATELLITE (GPS)

La technologie GPS (*Global Positioning System*), en plein développement, permet d'obtenir directement les coordonnées géodésiques d'un point stationné (une seule antenne sur un point) mais avec une précision médiocre, inutilisable en topographie. Si l'on dispose de deux antennes, on obtient avec précision la **distance** entre les deux points et l'**orientation du vecteur** mesuré (fig. 4.28. et chap. 7 § 1). Dans ce cas, on parle de mesure par **translocation**, c'est-à-dire de report des informations d'un point vers un autre point. A étant connu, on mesure par GPS  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  et  $\Delta Z$  et on en déduit que  $X_B = X_A + \Delta X$ ,  $Y_B = Y_A + \Delta Y$ ,  $Z_B = Z_A + \Delta Z$ .

Les coordonnées sont initialement calculées dans un référentiel cartésien géocentrique (voir chap. 2 § 2.2.3.1) et doivent ensuite être transformées en coordonnées planes en projection. L'ellipsoïde de référence est aussi différent : c'est l'ellipsoïde international IAGRS80 (très proche de GRS80) sur lequel s'appuie le système géocentrique **WGS 84** (*World Géodetic System*, datant de 1984). Il faut ainsi prévoir des transformations de coordonnées, dont se charge généralement le logiciel livré avec les antennes réceptrices (voir chap. 2 § 3.4).

La précision obtenue sur les coordonnées d'un point en mode différentiel (deux antennes) est de l'ordre du centimètre en planimétrie sur des distances de plusieurs dizaines de kilomètres et de quelques centimètres en altimétrie à cause essentiellement du problème de référence en altitude (voir chapitre 7).

